МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЮЖНО-УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО ИСТОРИИ И ФИЛОСОФИИ НАУКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К ПРЕДСТОЯЩЕМУ 300-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА (1707—1783)

Выпуск 5

Оренбург
Издательство ОГПУ
2006

УДК 51 (091)
ББК 22.1 г
И32

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук, профессор
Г. П. Матвиевская

И32 **Из истории математики XVIII века**. **К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера** : сборник научных статей. Вып. 5 / Мин-во образования и науки РФ, Оренб. гос. пед. ун-т ; отв. ред. Г. П. Матвиевская. — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2006. — 108 с. ; 2 л. ил.
ISBN 5-85859-308-9

УДК 51(091)
ББК 22.1 г

ISBN 5-85859-308-9 © Оформление. Издательство ОГПУ, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора.....4

Личикова Ж. Ю. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА 6

Игнатушина И. В. О ЧИСЛАХ БЕРНУЛЛИ В «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ» ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА.....33

Игнатушина И. В. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ 54

Курбатова Л. Н. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ТЕЛАХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ 65

Коротина В. А. ОТРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ИДЕЙ ЭЙЛЕРА В КУРСЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ПЕДВУЗА 73

Матвиевская Г. П. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЭЙЛЕРА И ОРЕНБУРГСКИЙ КРАЙ 83

Краткие сведения об авторах.....107

От редактора

15 апреля 2007 года исполняется 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера, великого ученого, заложившего основы современной математической науки. Внимание к его богатейшему наследию и к не имеющим аналога особенностям научного творчества никогда не угасает у историков математики. Понятно, что в преддверии юбилея деятельность Эйлера вызывает повышенный интерес.

Настоящий выпуск сборника, как и предыдущие, включает работы, касающиеся различных моментов творчества ученого.

Ж. Ю. Личикова в своей статье обсуждает численные методы математического анализа, разработанные Эйлером. Помимо опубликованных сочинений, ею были использованы рукописные заметки из его записных книжек, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН (ПФА РАН).

И. В. Игнатушина показывает, что Эйлер в «Дифференциальном исчислении» при решении многих задач применял числа, названные им «числами Бернулли» и вошедшие под этим именем в математику. Здесь он рассмотрел способы нахождения этих чисел и выявил их свойства.

В другой статье И. В. Игнатушиной дается краткий обзор результатов Эйлера в дифференциальной геометрии.

Л. Н. Курбатова рассматривает способы доказательства, которые предложил Эйлер для своей знаменитой теоремы, связывающей число вершин многогранника с числом его ребер и граней.

В. А. Коротина обращает внимание на те разделы курса теории чисел для педагогического вуза, в которых нашли отражение результаты, полученные Эйлером.

Статья Г. П. Матвиевской касается важного научного предприятия XVIII века, в котором Петербургская Академия наук и лично Леонард Эйлер приняли активное участие, — наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца в 1769 году и обработки полученных дан-

ных. В статье, написанной на основе материалов ПФА РАН, речь идет о наблюдениях, проводившихся в Орске и Оренбурге экспедициями, которые возглавляли Христофор Эйлер, сын академика, и Вольфганг Людвиг Крафт, его ученик и сотрудник.

Г. П. Матвиевская

Ж. Ю. Личикова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Интерес к приближенным математическим методам в наши дни возрос в связи с развитием вычислительной техники. Широкое использование электронных вычислительных машин поставило перед наукой два важных вопроса:

1. Как добиться, чтобы результат вычислений, выполненных машиной, находился в заданной близости к истинному решению, т. е. как найти наиболее точный приближенный метод?

2. Как разработать приближенные методы, приспособленные к особенностям машинного, а не ручного счета? [1, 4, 11, 17, 34].

Для решения этих вопросов нужно было пересмотреть все существовавшие приближенные методы с точки зрения применения их для вычислений на компьютере или искать новые, что является важной задачей, стоящей перед математиками с начала 60-х годов XX века.

В математике часто встречаются задачи, решение которых не удается получить в аналитическом виде, т.е. в виде формулы, связывающей искомые величины с заданными. В этом случае стремятся найти какой-нибудь бесконечный процесс, сходящийся к искомому ответу. Если такой процесс указан, то, выполняя определенное число ша-

гов, а затем обрывая вычисления, получают приближенное решение поставленной задачи. Такой подход был известен еще до появления ЭВМ, но применялся очень редко из-за трудоемкости больших вычислений. Применение численных методов на базе ЭВМ позволило избавиться от этой проблемы и существенно расширило класс решаемых математических задач.

Несмотря на долгую историю численных методов, в историко-математической литературе их развитию не уделено должного внимания, и этот вопрос остается малоизученным.

Великим ученым Леонардом Эйлером (1707—1783) были разработаны многие приближенные методы математического анализа и алгебры. В различных историко-математических обзорах отмечаются наиболее известные результаты Эйлера в области численного анализа. Некоторые применявшиеся им приближенные методы были исследованы в трудах А. Н. Крылова [11—13, 45], Н. И. Симонова [23—33], Н. С. Кошлякова [9, 44], Ф. П. Жирнова [5]. Результаты Эйлера, касающиеся знаменитой формулы суммирования, рассмотрены в работах В. В. Лихина [14, 15], С. С. Петровой [18—22] и М. В. Чирикова [40, 41] и др.

Однако, несмотря на внимание историков математики к данной проблеме, до сих пор не было проведено четкой систематизации приближенных методов Эйлера. Кроме того, его огромное научное наследие все еще изучено недостаточно, и поэтому можно предполагать, что не все методы, созданные им, известны современным математикам.

Численные методы математического анализа в работах Эйлера можно систематизировать следующим образом:

1) численное интерполирование функций;

2) численное дифференцирование различных функций;

3) интерполирование рядов;

4) численное интегрирование;

5) приближенные методы решения дифференциальных уравнений;

6) приближенные методы решения вариационных задач.

1. Интерполирование функций

Основными результатами Эйлера в области интерполирования являются различные исследования, связанные с интерполяционным многочленом Грегори — Ньютона, и создание своих собственных способов интерполяции.

Интерполяционная формула Грегори — Ньютона

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda\cdot\Delta f(x_0)+\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x_0)+\ldots$$

$$+\frac{\lambda\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\Delta^n f(x_0),$$

где $h=x_1-x_0$ и $0<\lambda<1$, послужила толчком к развитию теории конечных разностей. Эйлер в своем «Дифференциальном исчислении» (1755) [42] впервые дал систематическое изложения этой теории и ввел обозначения, которыми пользуются в настоящее время.

В трудах Эйлера теория конечных разностей стала удобным инструментом для решения различных математических задач, которые приводили к интерполированию функций, нахождению производных и дифференциалов функций, заданных таблично, приближенному решению дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных и т.д.

Конечные разности Эйлер также применял для вычисления сумм расходящихся рядов. Метод, которым пользовался Эйлер для вычисления таких сумм, он назвал разностным методом улучшения сходимости. В теории рядов этот метод получил название преобразования Эйлера или метода суммирования (E,q). При помощи разностного метода в работе «О расходящихся рядах» (E247) [56] Эйлер вычислил сумму гипергеометрического ряда Валлиса при $x=1:\quad 1-1+2-6+24-120+\ldots\approx 0{,}58$.

Исследования рядов с помощью конечных разностей имеются и в записных книжках Эйлера, например в записной книжке № 133 [36], датируемой примерно 1749—1753 гг.

Основываясь на теории конечных разностей, Эйлер решил многие вопросы, связанные с интерполяционной формулой Грегори — Ньютона, и прежде всего доказал ее справедливость. Этой формуле он уделял особое внимание и применял ее для решения различных задач, о чем свидетельствуют его мемуары. Например, используя эту формулу, в мемуаре E 247 [56] Эйлер предложил также второй способ для нахождения суммы гипергеометрического ряда Валлиса: отыскав конечные разности, он по интерполяционному многочлену Грегори — Ньютона нашел его сумму $1-1+2-6+24-120+\ldots\approx 0{,}6$.

Кроме применения формулы Грегори — Ньютона, Эйлер разработал и свои собственные интерполяционные методы, которые изложил в мемуарах «Рассмотрение некоторого ряда, обладающего особенным свойством» (E190, 1750) [51], «О превосходном применении метода интерполяций в науке о рядах» (E555, 1783) [53], «Разъяснения, касающиеся вычисления дифференциалов непредставимых функций» (E613, 1787) [60]. Так, в мемуаре E555 [53] он предложил свою интерполяционную формулу

$$y(x)=x\cdot\left(\frac{y(a)}{a}\cdot\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{c^2-x^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{d^2-x^2}{d^2-a^2}\cdot\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{y(b)}{b}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{c^2-x^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{d^2-x^2}{d^2-b^2}\cdot\ldots+\ldots\right)$$

и применил ее для функции $y=\sin x$. Это представление позволило Эйлеру приближенно вычислить значения $\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\ldots$ Например, значение π приблизительно равно 3,141566514, что представляет относительно хорошее приближение. Эта интерполяционная формула позволила ему вычислить интегралы вида $\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,dx$, получившие впоследствии название эйлеровых интегралов первого рода или бета-функции.

В XIX веке исчисление конечных разностей развивалось по следующим направлениям:

1) строгое обоснование законности инфинитезимальных операций;

2) обобщение различных конечно-разностных структур;

3) создание новых методов решения различных проблем в исчислении конечных разностей [21, с. 283].

В теории интерполяции в XIX веке были получены различные обобщения интерполяционных процессов. Кроме общих методов получения интерполяционных рядов, данных Лапласом и Абелем, было предложено большое число интерполяционных схем, в которых базисные функции отличны от многочленов (тригонометрические функции, показательные функции, некоторые специальные функции).

2. Методы приближенного дифференцирования функций

Интерполирование лежит в основе численных методов дифференцирования функций: формулы для приближенного нахождения производных или дифференциалов некоторой функции получаются в результате дифференцирования интерполяционного многочлена, выражающего эту функцию.

В «Дифференциальном исчислении» (1755) [42] Эйлер предложил методы численного дифференцирования для «непредставимых» функций, т.е. не являющихся алгебраическими или известными ему трансцендентными функциями.

Например, «непредставимой» является функция, которая выражает сумму ряда

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & x & & \ldots \\ A & + & B & + & C & + & D & + & \ldots & + & X & + & \ldots \end{array}$$

и не может быть представлена аналитически, т. е. $S(x) = A + B + C + D + \ldots + X(x)$.

Для «непредставимой» функции, у которой член X с индексом x стремится к нулю, при $x \to \infty$ он предложил следующие приближенные формулы для вычисления производных:

$$\frac{dS}{dx} = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + \ldots - \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C} \cdot x - 3\mathfrak{D} \cdot x^2 -$$
$$- 4\mathfrak{E} \cdot x^3 - \ldots,$$

$$\frac{d^2 S}{2\, dx^2} = -\mathfrak{C} - 3\mathfrak{D} \cdot x - 6\mathfrak{E} \cdot x^2 - 10\mathfrak{F} \cdot x^3 - \ldots,$$

...

и полного дифференциала:

$$dS = A \cdot dx + (B - A) \cdot dx + (C - B) \cdot dx + (D - C) \cdot dx + \ldots$$
$$- \mathfrak{B}\, dx - \mathfrak{C}\left(2x\, dx + dx^2\right) - \mathfrak{D}\left(3x^2 dx + 3x\, dx^2 + dx^3\right) -$$
$$- \mathfrak{E}\left(4x^3 dx + 6x^2 dx^2 + 4x\, dx^3 + dx^4\right) - \ldots$$

где $\sum X = \mathfrak{A}, \quad \sum \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}, \quad \sum \frac{d^2 X}{dx^2} = \mathfrak{C}, \ldots$

Для функции $S = A + B + C + D + \ldots + X$, у которой член X не стремится к нулю при $x \to \infty$, значение полного дифференциала будет находиться по формуле:

$$dS = dx \cdot \begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X'''' + \ldots \\ - X' - X'' - X''' - \ldots \end{Bmatrix} + X' \cdot dx -$$
$$- \frac{dx \cdot (1 - dx)}{1 \cdot 2} \cdot \begin{Bmatrix} + X''' + X'''' + X''''' + \ldots \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \ldots \\ + X' + X'' + X''' + \ldots \end{Bmatrix} -$$
$$- \frac{dx \cdot (1 - dx)}{1 \cdot 2} \cdot X'' + \frac{dx \cdot (1 - dx)}{1 \cdot 2} \cdot X' +$$
$$+ \frac{dx \cdot (1 - dx) \cdot (2 - dx)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \begin{Bmatrix} + X'''' + X''''' + X'''''' + \ldots \\ - 3X''' - 3X'''' - 3X''''' - \ldots \\ + 3X'' + 3X''' + 3X'''' + \ldots \\ - X' - X'' - X''' - \ldots \end{Bmatrix} +$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X''' - 2\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X'' +$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X' - d\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) -$$

$$-\frac{1}{2}d^3\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \frac{1}{6}d^3\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \ldots$$

В «Дифференциальном исчислении» Эйлер изложил также методы для нахождения производных и дифференциала другого вида «непредставимых» функций, а именно $S = A\cdot B\cdot C\cdot\ldots\cdot X$.

Для дифференцирования различных «непредставимых» функций он предложил еще один способ численного дифференцирования, основанный на знаменитой формуле суммирования, которую сейчас называют формулой Эйлера — Маклорена.

Эти приемы приближенного дифференцирования для «непредставимых» функций представляют особый интерес, так как являются общими: вместо данной «непредставимой» функции $S(x)$ может быть взят любой интерполяционный многочлен, приближенно заменяющий некоторую функцию $f(x)$.

3. Интерполирование рядов

В своих трудах Эйлер поставил общую проблему интерполирования: он не только рассматривал интерполирование различных функций, но и попытался перенести эти результаты на ряды.

Общую формулировку задачи об интерполировании рядов и различные способы ее решения Эйлер дал в главе XVII своего «Дифференциального исчисления». Он рассматривает ряд

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & x & & \ldots \\ A & + & B & + & C & + & D & + & \ldots & + & X & + & \ldots, \end{array}$$

общий член которого X известен, но неизвестен «суммационный член», который представляет собой функцию от

x и равен сумме x членов этого ряда. Предлагается образовать последовательность частичных сумм этого ряда

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots \\ A & , & (A+B) & , & (A+B+C) & , & (A+B+C+D) & , & \ldots \end{array}$$

вводится функция $S(x) = A + B + C + D + \ldots + X(x)$ и ставится вопрос об интерполируемости этой функции.

Предположив, что x есть целое неотрицательное число и соответствующее ему значение $S = A + B + C + D + \ldots + X$ известно, Эйлер ищет значение Σ, которое принимает S, если вместо x подставить $x + \omega$, где ω есть какая-либо дробь ($\Sigma = S(x + \omega)$, $0 < \omega < 1$).

Он обозначает через $X', X'', X''', \ldots$ члены ряда, соответствующие индексам $x+1, x+2, x+3, \ldots$, а через $Z, Z', Z'', Z''', \ldots$ — члены, отвечающие индексам $x+\omega, x+\omega+1, x+\omega+2, x+\omega+3, \ldots$, и рассматривает несколько случаев.

Первый случай тривиален. Если бесконечно удаленные члены $A, B, C, D, \ldots$ ряда стремятся к нулю, тогда:

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + \ldots - Z' - Z'' - Z''' - \ldots$$

Для случаев же, когда общий член ряда не стремится к нулю, но стремятся к нулю разности членов этого ряда некоторого порядка, Эйлер предлагает следующую формулу:

$$\begin{aligned} \Sigma = {} & S + X' + X'' + X''' + \ldots - Z' - Z'' - Z''' - \ldots + \\ & + \omega\left(X' + \Delta X' + \Delta X'' + \ldots\right) + \\ & + \frac{\omega \cdot (\omega - 1)}{1 \cdot 2}\left(\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}$$

Полученные Эйлером формулы позволяют вычислить значение суммы любого ряда с заданным общим членом от произвольного действительного количества членов этого ряда.

4. Численное интегрирование

Проблемой интегрирования занимались многие ученые XVIII века, когда еще не было дано строгого с точки зрения современной математики определения понятий неопределенного и определенного интеграла. В трудах Эйлера, наряду с попытками сформулировать эти понятия, мы находим различные способы вычисления интегралов, в том числе и приближенные.

Свои методы численного интегрирования Эйлер изложил в первом томе «Интегрального исчисления» (1768) [43], в «Дифференциальном исчислении» (1755) [42] и в мемуарах [50, 55, 57, 59, 61, 63, 64, 65, 69].

В «Интегральном исчислении» Эйлер впервые сформулировал задачу численного интегрирования, которая заключается в вычислении приближенного значения определенного интеграла $y = \int_a^x X\,dx$, и решил ее методом, который сейчас носит название метода прямоугольников.

Введя обозначения и определив значения интеграла

$$y = \int_a^x X\,dx:$$

При	$x = a$	пусть	$X = A$	и, следовательно	$y = b$,
	$x = a'$	и	$X = A'$	—	$y = b' = b + A \cdot (a' - a)$,
	$x = a''$ ...	и	$X = A''$	—	$y = b'' = b' + A'(a'' - a')$, ...,

Эйлер заключает значения этого интеграла между границами

$$b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + \ldots +' X(x -' x),$$
$$b + A'(a' - a) + A''(a'' - a') + \ldots + X(x -' x).$$

Впервые метод прямоугольников Эйлер изложил в мемуаре «Универсальный метод приближенного нахождения суммы сходящегося ряда» (E46, 1741) [64], где он не только указал верхнюю и нижнюю границы для определенного интеграла, но и предложил формулу для оценки погрешности.

В «Интегральном исчислении» [43] Эйлер также усовершенствовал рассмотренный им метод прямоугольников, т.е. предложил другую формулу для вычисления значения $y=\int\limits_a^x X\,dx$:

$$y=b+\alpha\left(A'+A''+A'''+\ldots+X\right)-\frac{1}{2}\alpha^2\left(B'+B''+\ldots+P\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\alpha^3\left(C'+C''+\ldots+Q\right)+\ldots,$$

где $X=\dfrac{dy}{dx},\quad P=\dfrac{dX}{dx},\quad Q=\dfrac{dP}{dx},\quad R=\dfrac{dQ}{dx},\ldots$ и

	a	a'	a''	a'''	…
$P=\dfrac{dX}{dx}$	B	B'	B''	B'''	…
$Q=\dfrac{dP}{dx}$	C	C'	C''	C'''	…
…					

Для вычисления интеграла Эйлер применял еще один метод, основанный на формуле суммирования Эйлера — Маклорена, которая выражает зависимость между суммой ряда, в виде которого представлена данная функция, и интегралом её n-го члена:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\sim C+\int\limits_1^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\cdot f^{(2k-1)}(n),$$

где B_{2k} — числа Бернулли и C — некоторая постоянная.

Эйлер привел ее без доказательства в работе 1741 г. «Общий метод суммирования прогрессий» (E25) [63] и дал ее вывод в работе «Определение суммы любого ряда с данным общим членом» (E47) [61], которая также вышла в 1741 г.

Однако эта формула и её доказательство были известны Эйлеру ещё раньше. В записной книжке № 131 [38],

датированной 1736—1740 гг., приведен полный вывод формулы суммирования, который и был опубликован в E47. Применение этой формулы имеется в письмах Эйлера к Дж. Стирлингу от 8 (19) июня 1736 г. и 27 июня (7 августа) 1738 г. [10, с. 120—128, с. 133—151]. Кроме того, подробное доказательство этой формулы Эйлер привел в «Дифференциальном исчислении» (1755) [42, с. 281—301], где не только представил вывод формулы суммирования, но и рассмотрел различные подходы к вычислению коэффициентов.

Судя по работам E41 [59], E55 [65], E393 [58], E583 [55], E617 [57] и заметкам из записных книжек, эта формула интересовала Эйлера в течение всей жизни. С ее помощью он интерполировал дзета- и гамма-функции, а также проводил различные вычисления значений сумм рядов, интегралов и трансцендентных чисел [2, 6, 7, 22].

Например, в «Дифференциальном исчислении» Эйлер по формуле суммирования приближенно вычислил $\int_0^n \frac{dx}{x^2+n^2}$ и получил способ для вычисления приближенного значения числа π:

$$\pi = 4nSz + \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1\cdot n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^2\cdot n^6} + \\ + \frac{5}{66}\frac{1}{5\cdot 2^4\cdot n^{10}} + \ldots - \frac{4\pi}{e^{2\pi n}-1}.$$

При $n=5$ значение π приближенно равно 3,14159265358979345. Это выражение отличается от истинного только в предпоследнем десятичном знаке.

В дальнейшем исследования, связанные с формулой суммирования Эйлера — Маклорена, проводили К. Ф. Гаусс (1777—1855), Ж. А. Пуанкаре (1854—1912), А. М. Лежандр (1752—1833), М. В. Остроградский (1801—1861), П. С. Лаплас (1749—1827), Н. И. Лобачевский (1792—1856), С. Д. Пуассон (1781—1840), К. Г. Якоби (1804—1851) и др. [19, с. 107—108]. Оригинальный вывод формулы Эйлера —

Маклорена (без использования ряда Тейлора) был предложен В. Г. Имшенецким (1832—1892) [8, с. 63].

Формула Эйлера — Маклорена с добавлением остатка ряда играет важную роль в современном численном анализе и применима как для вычисления сумм различных рядов, так и определенных интегралов.

5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Одним из самых известных результатов Эйлера в области приближенного анализа является «метод ломаных» для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эйлер изложил метод ломаных в «Интегральном исчислении» (1768—1770) [43]. Свои исследования он начал с постановки общей задачи, которая заключается в том, что начальные данные задаются в общей форме, а не в виде каких-то конкретных численных значений. Это позволяет сделать вывод о том, что Эйлер предвосхитил постановку задачи Коши с начальными данными как одну из центральных задач теории дифференциальных уравнений.

Эйлер считал, что для уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = V(x, y)$ на интервале $[x, x+\alpha]$ функцию V можно рассматривать как постоянную и равную A. Поэтому значение в точке $x+\alpha$ он принимает равным $y = b + A \cdot (x - a)$. Этот процесс можно повторить n-ое количество раз и найти значение искомой функции в заданной точке.

Как известно, метод ломаных иногда дает большую погрешность и его часто применяют для ориентировочных расчетов. Зная этот недостаток, Эйлер усовершенствовал этот приближенный метод, т.е. выразил функцию y следующим образом:

$$y = b + A \cdot \alpha + \frac{1}{2} B \cdot \alpha^2 + \frac{1}{6} C \cdot \alpha^3 + \frac{1}{24} D \cdot \alpha^4 + \ldots,$$

где $\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = B, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = C$.

Для дифференциальных уравнений второго порядка Эйлер также применял метод ломаных. Дифференциальное уравнение $\frac{d^2 y}{dx^2} = V\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ он записал в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка $\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = V(x, y, p)$ и в качестве начальных данных взял $x = a$, $y = b$, и $p = \frac{dy}{dx} = c$.

Тогда последующее значение y и производная p в точке $x = a + \alpha$ по методу ломаных найдутся по формулам: $y = b + c\alpha$, $p = c + F \cdot \alpha$.

Эйлер и в этом случае видел недостатки этого метода и поэтому усовершенствовал его, выражая функцию y в виде:

$$y = b + c \cdot (x - a) + \frac{1}{2} A \cdot (x - a)^2 - \frac{1}{6} (P + Qc + RA) \cdot (x - a)^3,$$

где $dV(x, y, p) = P(x, y, p)\,dx + Q(x, y, p)\,dy + R(x, y, p)\,dp$.

Таким образом, для приближенного решения дифференциального уравнения Эйлер предложил не только метод ломаных, но и два других менее известных современным математикам метода, которые учитывают изменяемость функции, стоящей в правой части данного уравнения, и тем самым ведут к более точным вычислениям значений искомой функции.

Введенный Эйлером метод ломаных в дальнейшем был усовершенствован О. Коши (1789—1857), который, применяя этот метод, дал доказательство существования в области аналитических функций решения уравнения

$y' = f(x, y)$ с начальными условиями $(x = x_0,\ y = y_0)$ [3, с. 84; 33, с. 128—129; 13, с. 8].

6. Методы решения дифференциальных уравнений, полученных из астрономических задач

Решая различные астрономические задачи, Эйлер на основании законов Кеплера и закона всемирного тяготения Ньютона составлял дифференциальные уравнения второго порядка и системы дифференциальных уравнений (E112 [48], E120 [68], E304 [47], E384 [49], E400 [46], E418 [45], E458 [66]).

Для их решения он предложил различные приближенные способы, например, широко использовал степенные и тригонометрические ряды. Так, в работе «Исследования о неправильностях в движении Юпитера и Сатурна» (E384, 1769) [49] для определения координат этих планет Эйлер получает систему четырех уравнений второго порядка:

$$2dx\, d\eta + xd^2\eta = -\nu a^3 dp^2 \sin\omega\left(\frac{-1}{y^2} + \frac{y}{z^3}\right),$$

$$d^2x - x\, dy^2 = -a^3 dp^2\left(\frac{1+\mu}{x^2} + \frac{\nu\cos\omega}{y^2} + \frac{\nu(x - y\cos\omega)}{z^3}\right),$$

$$2dy\, d\theta + yd^2\theta = -\mu b^3 dq^2 \sin\omega\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{z^3}\right),$$

$$d^2y - y\, d\theta^2 = -b^3 dp^2\left(\frac{1+\nu}{y^2} + \frac{\mu\cos\omega}{x^2} + \frac{\mu(y - x\cos\omega)}{z^3}\right),$$

где η — долгота Юпитера; θ — долгота Сатурна $(\omega = \eta - \theta)$; a — среднее расстояние Юпитера от Солнца; b — среднее расстояние Сатурна от Солнца; p — средняя долгота Юпитера; q — средняя долгота Сатурна; μ и ν равны отношениям масс соответствующих планет к массе Солнца $\left(\mu = \frac{1}{1067},\quad \nu = \frac{1}{3021}\right)$.

Эйлер предлагает искать решение этой системы в виде тригонометрических рядов

$$x = \frac{c}{m} + A\cos\omega + B\cos 2\omega + C\cos 3\omega + \ldots,$$

$$y = \frac{e}{m} + A'\cos\omega + B'\cos 2\omega + C'\cos 3\omega + \ldots$$

и получает приближенное значение координат Сатурна и Юпитера.

Другой метод решения дифференциальных уравнений второго порядка и систем дифференциальных уравнений, который предложил Эйлер, — это метод последовательных приближений. Впервые он был опубликован в 1763 г. в астрономическом трактате «Замечания о задаче трех тел» (E400) [46].

В этой работе Эйлер получил уравнения:

$$\alpha\, d^2x = P\, dt^2,\ \alpha\, d^2y = Q\, dt^2,\ \alpha\, d^2z = R\, dt^2,$$

P, Q, R — компоненты равнодействующей всех сил, действующих на рассматриваемое небесное тело, а α — коэффициент, зависящий от его массы и от выбора единиц.

Зная положение тела (x, y, z) и его скорость (p, q, r) в заданный момент времени t, он нашел его положение (x', y', z') и скорость (p', q', r') в другой, не очень отдаленный от исходного момент $t + \tau$ по формулам:

$$x' = x + \tau \cdot p + \frac{\tau^2}{2\alpha}P + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dP}{dt} + \ldots \qquad p' = p + \frac{\tau}{\alpha}P + \frac{\tau^2}{2\alpha}\frac{dP}{dt} + \ldots$$

$$y' = y + \tau \cdot q + \frac{\tau^2}{2\alpha}Q + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dQ}{dt} + \ldots \qquad q' = q + \frac{\tau}{\alpha}Q + \frac{\tau^2}{2\alpha}\frac{dQ}{dt} + \ldots$$

$$z' = z + \tau \cdot r + \frac{\tau^2}{2\alpha}R + \frac{\tau^3}{6\alpha}\frac{dR}{dt} + \ldots \qquad r' = r + \frac{\tau}{\alpha}R + \frac{\tau^2}{2\alpha}\frac{dR}{dt} + \ldots$$

Найдя указанным способом величины (x', y', z') и (p', q', r'), характеризующие «состояние тела» в момент

$t+\tau$, можно таким же способом найти его состояние для любого момента $t+n\tau$. Эйлер также указывает на способ подсчета точности проведенных вычислений.

Исследования Эйлера, касающиеся задачи трех тел, особенно интересны потому, что, как было показано в XIX в., в общем виде она неразрешима. Этой задаче Эйлер уделял много внимания. Кроме опубликованных работ этому вопросу посвящены также некоторые заметки из записных книжек. Так, в записной книжке № 134, датированной 1749—1757 гг., на листах 93 об. и 94 [39] Эйлер составил шесть дифференциальных уравнений, которые описывают движение трех тел по параллельным прямым.

Предложенный для решения задачи трех тел метод последовательных приближений применялся Эйлером и для нахождения неравенств движения Луны. Свое решение этой задачи он опубликовал в 1772 г. в мемуаре «Теория движения Луны, трактованная новым методом...» [45].

Движение Луны выражается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2(m+1)\frac{dy}{dt}-(m+1)^2(1+x)+\frac{\lambda(1+x)}{\left((1+x)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{\mathfrak{A}}{a}+\frac{\mathfrak{B}}{a}+\frac{\mathfrak{C}}{a}+\frac{\mathfrak{D}}{a}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2(m+1)\frac{dx}{dt}-(m+1)^2y+\frac{\lambda y}{\left((1+x)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{A}{a}+\frac{B}{a}+\frac{C}{a}+\frac{D}{a}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\lambda z}{\left((1+x)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mathfrak{a}}{a}+\frac{\mathfrak{b}}{a}+\frac{\mathfrak{c}}{a}+\frac{\mathfrak{d}}{a}=0,$$

где $\lambda=\dfrac{\nu}{a^3}$,

$$\frac{\mathfrak{A}}{a} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2p - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x\cos 2p + \frac{3}{2}y\sin 2p,$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{a} = -\frac{3}{8}a\cdot(3\cos p + 5\cos 3p) - \frac{3}{4}ax(3\cos p + 5\cos 3p) +$$

$$+\frac{3}{4}ay(\sin p + 5\sin 3p) - \frac{3}{8}ax^2(3\cos p + 5\cos 3p) +$$

$$+\frac{3}{4}axy(\sin p + 5\sin 3p) - \frac{3}{8}ay^2(3\cos p - 5\cos 3p) +$$

$$+\frac{3}{2}az^2\cos p$$

...

Здесь x, y, z — координаты Луны относительно Земли; t — независимая переменная, пропорциональная времени (средняя аномалия Солнца); a — среднее расстояние от Луны до Земли (при условии, что среднее расстояние от Земли до Солнца принято за единицу); p — разность средней долготы Луны и средней долготы Солнца; m — коэффициент пропорциональности угла p и времени (из наблюдений установлено, что величина $m = 12{,}36895369$); $\nu = \frac{\Theta}{S+\Theta}$, $\mu = \frac{S}{S+\Theta}$, где S — масса Солнца, Θ — масса Земли и Луны (см. рис. 1, 2).

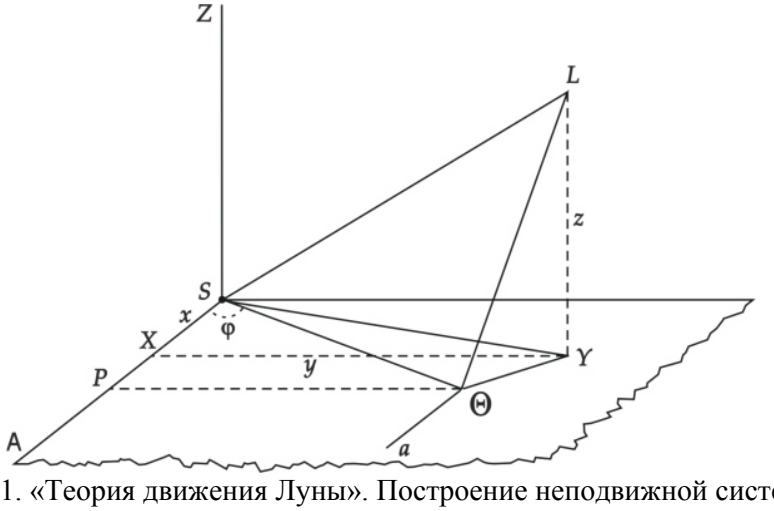


Рис. 1. «Теория движения Луны». Построение неподвижной системы координат $SXYZ$

На рис. 1 точка Θ — общий центр тяжести Земли и Луны; точка S — центр Солнца; ось SX направлена в точку весеннего равноденствия (точка X); ось SZ направлена перпендикулярно к плоскости эклиптики (SXY); ось SY направлена в точку, долгота которой равна 90°.

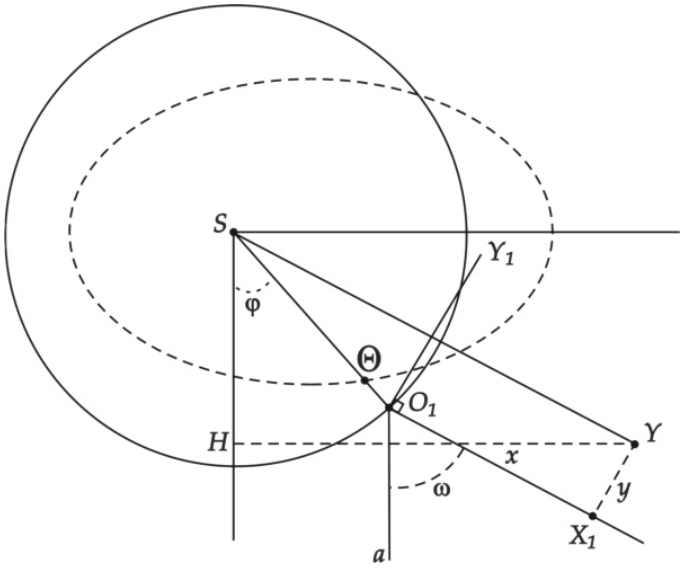


Рис. 2. «Теория движения Луны». Построение подвижной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$

Точка O_1 — приближенное положение центра тяжести Земли и Луны (движение равномерно по кругу); ось O_1X_1 параллельна равномерно вращающейся прямой SY; ось O_1Y_1 построена на 90° вправо от O_1X_1 (если из точки O_1 смотреть на Солнце); ось O_1Z_1 перпендикулярна к плоскости эклиптики.

Используя метод последовательных приближений, Эйлер получает решение этой системы, имеющее вид:

$$10^7 x = A_0 + \sum_i A_i \cos \omega_i,$$

$$10^7 y = \sum_i B_i \sin \omega_i,$$

$$10^7 z = \sum_i C_i \sin \omega_i.$$

Для каждого i он выписывает соответствующие выражения аргументов ω_i и составляет астрономическую таблицу значений соответствующих коэффициентов A_i, B_i.

Применение метода последовательных приближений приводит к случаю, когда в решениях появляются так называемые вековые члены, содержащие время вне знаков синуса и косинуса, т.е. представляющие собой выражения вида $ht \cdot \sin nt$ [45, с. VIII].

Чтобы от них избавиться, Эйлер указывает, что можно составить некоторое уравнение, заменяющее характеристическое уравнение для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Этого уравнения по его сложности Эйлер, как он говорит, составлять «не отваживается», а определяет нужную ему величину на основании непосредственных астрономических наблюдений.

Через сто лет это уравнение составили и решили независимо друг от друга два астронома — английский ученый Дж. К. Адамс (1819—1892) [71] и американский Дж. У. Хилл (1838—1914) [70].

7. Общий метод решения вариационных задач

Создателем вариационного исчисления по праву считается Эйлер. Он обобщил все свои результаты и исследования предшественников и современников по вариационному исчислению, систематизировал различные вариационные задачи и создал общий приближенный метод решения таких задач.

В период с 1726 по 1744 год Эйлер пытался найти единый способ решения любой вариационной задачи. Об этом свидетельствуют его первые работы — «О кратчайшей линии на поверхности, соединяющей каким-нибудь образом любые две точки» (E9, 1732) [54], «Общее решение изопериметрической задачи, взятой в самом общем смысле» (E27, 1738) [67], «Новое и лёгкое отыскание кривых, обладающих максимальными или минимальными свойствами» (E56, 1741) [52], «Механика, т.е. наука о движении, изложенная аналитическим методом» (E16, 1736) [62] и заметки из записных книжек.

В 1744 г. Эйлер опубликовал мемуар «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума...» (E65) [44], в котором он впервые сформулировал задачу вариационного исчисления в общем виде, именно как задачу на отыскание экстремума некоторого интегрального выражения вида

$$W = \int Z(x, y, y', y'', ...)\, dx,$$

и предложил метод решения этих задач, который назвал «методом максимумов и минимумов в применении к кривым линиям».

Таким образом, Эйлер ввел некоторую величину $W = \int Z\, dx$, которая должна получить наибольшее или наименьшее значение для разыскиваемой кривой $y = y(x)$. Это равенство он называл «формулой максимума или минимума» и рассмотрел три вида таких формул.

К первому виду он отнёс те формулы, в которых Z есть алгебраическая функция, зависящая от $x, y, y', y'', ...$ Ко второму виду — формулы, в которых выражение Z содержит некоторые интегральные соотношения. Третий вид составляют формулы, где значение Z определяется дифференциальным уравнением, которые Эйлер охарактеризовал как «не поддающиеся интегрированию».

Для каждого вида формул максимума и минимума Эйлер находит уравнение, выражающее искомую кривую $y = y(x)$. В общем виде суть предложенного им метода можно сформулировать следующим образом:

1. Производная y'_i заменяется отношением $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, а интеграл $W = \int\limits_a^b f(x.\, y.\, y')\, dx$ — суммой $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\ y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)$, т. е. с геометрической точки зрения кривая интегрирования W заменяется ломаной.

2. Задача об отыскании экстремума переменной величины W преобразовывается в задачу об отыскании экстремума функции

$$S(y_0, y_1, ..., y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).$$

Этим методом, называемым сейчас методом ломаных, Эйлер решил большое количество вариационных задач: задачи о геодезических линиях, о максимальной и минимальной площади поверхности тела вращения и ряд изопериметрических задач.

Иллюстрацию того, каким образом создавался и использовался метод ломаных, мы находим в записных книжках Эйлера.

В записной книжке № 131, датированной 1736—1740 гг., имеется заметка об отыскании кривых, на которых имеет место минимум или максимум интеграла $\int R^m \, ds$, где R — радиус кривизны, а s — дуга кривой.

В этой же записной книжке на листе 82 [35] Эйлер решает более общую вариационную задачу: «Среди всех кривых найти ту, которая сообщает величине $\int Z \, dx$ максимальное или минимальное значение. Функция Z есть функция, зависящая от двух переменных x и y выражений вида $\int S \, dx, \ \int T \, dx, \ ...$

В записной книжке № 132 (1740—1744 гг.) Эйлер рассматривает вариационную задачу для интеграла $\int Z \, dx$, при условии, что функция Z зависит от $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ...$ и формулирует теорему об однородных функциях.

В записной книжке № 133 [37], датированной 1749—1753 гг., Эйлер решает задачу, сформулированную, как он пишет, Я. Бернулли: «Найти кривую, сообщающую величине $\int S \, dx$ максимум или минимум. Величина S зависит

от неопределенной величины $\Pi = \int \left(1 - p^2\right) dx$ и имеет дифференциал $dS = L\, dp$ ».

Дальнейшее развитие вариационного исчисления было связано с поисками необходимых условий экстремума кратных интегралов, построением теории двумерных и криволинейных интегралов, выявлением связи между объемными, поверхностными и криволинейными интегралами. Все эти вопросы были разработаны в первой половине XIX века в трудах К. Ф. Гаусса (1777—1855), М. В. Остроградского (1801—1862), Д. Грина (1793—1841), С. Д. Пуассона (1781—1840) и др.

Таким образом, Эйлер разработал многие приближенные методы математического анализа и вариационного исчисления. Некоторые из них широко используются в современной математике (например, метод ломаных и формула суммирования Эйлера — Маклорена). Однако многие другие методы были незаслуженно забыты (например, интерполяционные формулы, предложенные Эйлером, дифференцирование непредставимых функций, метод последовательных приближений для решения дифференциальных уравнений второго порядка). Эти результаты Эйлера, на наш взгляд, могут быть рассмотрены в современном курсе «Численных методов» и позволят дополнить его новыми методами.

Список литературы и источников

1. Гнеденко Б. В. Проблемы истории математики Нового времени / Б. В. Гнеденко, К. А. Рыбников, Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Физматгиз, 1963. Вып. 15. С. 74—96.

2. Горлова В. Д. Неопубликованные материалы Эйлера по аналитической теории чисел. Элементы теории дзета-функции в его записных книжках : дис. … канд. физ.-мат. наук / В. Д. Горлова. Оренбург, 1998.

3. Демидов С. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / С. С. Демидов С. С. [и др.] // Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1987. С. 80—183.

4. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. М. : Наука, 1967. 368 с.

5. Жирнов Ф. П. Методы приближенных вычислений в работах ученых XVII в. и их развитие в трудах Леонарда Эйлера : дис. … канд. физ.-мат. наук / Ф. П. Жирнов. М., 1964.

6. Игнатушина И. В. Вопросы теории Г-функции в записных книжках Л. Эйлера / И. В. Игнатушина // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Оренбург : Изд. ОГПУ, 2002. Вып. 3. С. 30—53.

7. Игнатушина И. В. Формирование основ теории гамма-функции в трудах, переписке и записных книжках Л. Эйлера / И. В. Игнатушина // Историко-математические исследования. М. : Янус-К, 2003. Вып. 8 (43). С. 140—161.

8. Коренцова М. М. Колин Маклорен. 1698—1746 / М. М. Коренцова. М. : Наука, 1998. 144 с.

9. Кошляков Н. С. Вариационное исчисление Эйлера / Н. С. Кошляков // Леонард Эйлер (1707—1783) : сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1935. С. 39—50.

10. Красоткина Т. А. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга / Т. А. Красоткина // Историко-математические исследования. М. : Физматгиз, 1957. Вып. 10. С. 117—158.

11. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях : учеб. пособие для высш. учеб. завед. / А. Н. Крылов. М. : Гостехтеориздат, 1954. 400 с.

12. Крылов А. Н. Леонард Эйлер / А. Н. Крылов // Леонард Эйлер (1707—1783) : сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М. : Изд-во АН СССР, 1935. С. 1—28.

13. Крылов А. Н. Собрание трудов. Т. 5 : Математика и механика / А. Н. Крылов. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1937. 514 с.

14. Лихин В. В. Первый период развития теории суммирования функций / В. В. Лихин // Вопросы истории естествознания и техники. М. : Наука, 1969. Вып. 1(26). С. 27—30.

15. Лихин В. В. Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах отечественных математиков / В. В. Лихин // Историко-математические исследования. М. : Наука, 1959. Вып. 12. С. 59—135.

16. Мандрыка А. П. Значение исследований Леонарда Эйлера по баллистике / А. П. Мандрыка // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука : сб. статей / под ред. Н. Н. Боголюбова, Г. К. Михайлова, А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1988. С. 233—236.

17. Петров Ю. П. Лекции по истории прикладной математики / Ю. П. Петров. СПб. : НИИХ СПбГУ, 2001. 337 с.

18. Петрова С. С. О суммировании Эйлером ряда $1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots$ / С. С. Петрова // Вопросы истории естествознания и техники. М., 1969. Вып. 1(26). С. 30—33.

19. Петрова С. С. Формула суммирования Эйлера — Маклорена и асимптотические ряды / С. С. Петрова // История и методология естественных наук. М. : Изд-во МГУ, 1989. Вып. 36. С. 103—108.

20. Петрова С. С. Из истории открытия ряда Тейлора / С. С. Петрова, Д. А. Романовска // Историко-математические исследования. М. : Физматгиз, 1980. Вып. 25. С. 10—24.

21. Петрова С. С. Исчисление конечных разностей / С. С. Петрова, А. Д. Соловьев // Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1987. С. 184—239.

22. Прокина-Игнатушина И. В. О некоторых результатах Л. Эйлера по теории гамма-функции / И. В. Прокина-Игнатушина // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2001. Вып. 2. С. 86—100.

23. Симонов М. І. Про дослідження Леонарда Ейлера з теорії звичайних диференціальних рівнянь / М. І. Симонов // Історико-математичний збірнік. Киев : Вид-во АН УССР, 1959. Вып. 1.

24. Симонов М. І. Про перший період развитку теорії рівнянь з частинними похідними першого порядку / М. І. Симонов // Історико-математичний збірнік. Киев : Вид-во АН УССР, 1961. Вып. 2.

25. Симонов Н. И. Исследования Леонарда Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики / Н. И. Симонов // Труды института истории естествознания и техники АН СССР. М., 1958. Т. 28. С. 138—183.

26. Симонов Н. И. О гиперболических дифференциальных уравнениях у Эйлера и у Коши / Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Наука, 1974. Вып. 19. С. 132—142.

27. Симонов Н. И. О научном наследии Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений / Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Гостехтеориздат, 1954. Вып. 7. С. 513—595.

28. Симонов Н. И. О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Физматгиз, 1956. Вып. 9. С. 789—803.

29. Симонов Н. И. О развитии теории линейных дифференциальных уравнений от Эйлера до Пеано / Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Наука, 1966. Вып. 17. С. 333—338.

30. Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными / Н. И. Симонов // Историко-математические исследования. М. : Гостехтеориздат, 1957. Вып. 10. С. 327—362.

31. Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям математической физики / Н. И. Симо-

нов // Труды института истории естествознания и техники АН СССР. М., 1959. Т. 28. С. 138—187.

32. Симонов Н. И. Об основных направлениях теории дифференциальных уравнений в XVIII и XIX столетиях / Н. И. Симонов // История и методология естественных наук. М. : Изд-во МГУ, 1966. Вып. 5. С. 157—174.

33. Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера / Н. И. Симонов. М. : Гостехтеориздат, 1957. 168 с.

34. Тихонов А. Н. Рассказы о прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. М. : Наука, 1979. 208 с.

35. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 82.

36. Там же. № 133. Л. 18—19.

37. Там же. № 133. Л. 218.

38. Там же. № 131. Л. 237—239.

39. Там же. № 134. Л. 93 об. — 94.

40. Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов / М. В. Чириков // Историко-математические исследования. М. : Физматгиз, 1960. Вып. 13. С. 441—472.

41. Чириков М. В. К истории становления асимптотических методов математического анализа в XIX в. / М. В. Чириков // История и методология естественных наук. М. : Изд-во МГУ, 1970. Вып. 9. С. 239—248.

42. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер ; пер. с лат., вступ. статья и примеч. М. Я. Выгодского. М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1949. 582 с.

43. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Л. Эйлер ; пер. с лат. С. Я. Лурье, М. Я. Выгодского ; предисл. М. Я. Выгодского. М. : Гостехтеориздат, 1956. Т. 1. 416 с.

44. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Л. Эйлер ; пер. с лат. Я. М. Боровского ; под ред. Н. С. Кошлякова. М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1934. 593 с.

45. Эйлер Л. Новая теория движения Луны / Л. Эйлер ; пер. с лат. и примеч. А. Н. Крылова. Л. : Изд-во АН СССР, 1934. 208 с.

46. Eu1er L. Considérationes sur le problème des trios corps / L. Eu1er // Mèm. de l'Acad. des Sciences de Berlin. 1770. 19. P. 194—220; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1960. Ser. II. Vol. 26. (E400)

47. Eu1er L. Considerationes de motu corporum coelestium / L. Eu1er // Novi comm. acad. sci. Petrop. 1766. 10. P. 544—588; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1960. Ser. II. Vol. 25. P. 246—257. (E304)

48. Eu1er L. Recherches sur le mouvement des corps célestes au général / L. Eu1er // Mèm. de 1'Acad. des Sciences de Berlin. 1749. 3. P. 93—143; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1960. Ser. II. Vol. 25. P. 1—44. (E112)

49. Eu1er L. Recherches sur les inégalités des Jupiter et de Saturne / L. Eu1er // Recueil des piéeces qui ont remporte le prix. Paris. 1769. 7. P. 3—84; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1960. Ser. II. Vol. 26. P. 220—256. (E384)

50. Euler L. Considaratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1750. 11. P. 116—127; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 516—541. (E125)

51. Euler L. Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae / L. Eu1er // Novi. comment. Acad. sci. Petrop. 1753. 3. P. 86—108; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 516—541. (E190)

52. Euler L. Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1741. 8. P. 159—190; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1952. Ser. I. Vol. 25. P. 54—80. (E56)

53. Euler L. De eximio use methodi interpolationum in serierum doctrina / L. Eu1er // Opuscula analytica. 1783. 1. P. 157—210; То же // Leonhardi Euleri opera Omnia. 1927. Ser. I. Vol 15. P. 435—497. (E555)

54. Euler L. De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1732. 3. P. 124—134; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1952. Ser. I. Vol. 25. P. 1—12. (E9)

55. Euler L. De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente / L. Eu1er // Acta. Acad. sci. Petrop. 1785. 2 (1781). P. 45—75; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1927. Ser. I. Vol. 15. P. 567—603. (E583)

56. Euler L. De seriebus divergentibus / L. Eu1er // Novi. comment. Acad. sci. Petrop. 1760. 5. P. 259—298; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 585—603. (E247)

57. Euler L. De summatione serierum in quibus terminorum signa alternantur / L. Eu1er // Nova acta Acad. sci. Petrop. 1788. 2. P. 46—69; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1935. Ser. I. Vol. 16. Sectio 1. P. 47—78. (E617)

58. Euler L. De summis serierum numeros Bernoullianos involventium / L. Eu1er // Novi. comment. Acad. sci. Petrop. 1770. 14. P. 104—128; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1927. Ser. I. Vol. 15. P. 91—130. (E393)

59. Euler L. De summis serierum reciprocarum / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1740. 7. P. 150—161; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 73—86. (E41)

60. Euler L. Dilucidationes in capita postrema Calculi mei differntialis de functionibus inexplicabilibus / L. Eu1er // Institutiones calculi differencialis. Ticini [Pavia]. 1787. 1. P. 705—732; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1935. Ser. I. Vol 16. Sectio 1. P. 1—33. (E613)

61. Euler L. Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1741. 8. P. 9—22; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 108—123. (E47)

62. Euler L. Mechanica sive motus scientia analytice exposita / L. Eu1er. Petrop., 1736. T. 2; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1912. Ser. II. Vol. 2. (E16)

63. Euler L. Methodus generalis summandi progressiones / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1738. 6. P. 28—36; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. (E25)

64. Euler L. Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1741. 8 (1736). P. 3—9; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 101—107. (E46)

65. Euler L. Methodus universalis series summandi ulterius promota / L. Eu1er // Comment. Acad. sci. Petrop. 1741. 8 (1736). P. 147—158; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1925. Ser. I. Vol. 14. P. 124—137. (E55)

66. Euler L. Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi / L. Eu1er // Novi Comment. Acad. sci. Petrop. 1774. 18. P. 354—376; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1961. Ser. II. Vol. 29. P. 273—292. (E458)

67. Euler L. Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis / L. Eu1er // Comment. Acad. Sci. Petrop. 1738. 6. P. 123—155; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1952. Ser. I. Vol. 25. P. 13—40. (E27)

68. Euler L. Recherches sur la question des inégalités du mouvenment de Saturne et de Jupiter / L. Eu1er // Piéces remp. prix Acad. Roy. Sci. Paris. 1749. P. 1—123; То же // Leonhardi Euleri opera omnia. 1960. Ser. II. Vol. 25. P. 45—157. (E120)

69. Euler L. Remarques sul un beau rapport entre les séries des puissunces tant directes que réciproques / L. Eu1er // Mem. Acad. Roy. sci. et belles-lettres, 1768. 17. P. 83—106; То же // Leonhardi Euleri Opera omnia. 1927. Ser. I. Vol. 15. P. 70—90. (E352)

70. The collected mathematical Works of George William Hill. Washington: Publishes by the Carnegie Institution of Washington, 1905. 364 p.

71. The Scientific Papers of John Couch Adams. M.a., Sc. D., D.C.L. L.L.D, F.R.S., late Londean professor of Astronomy and Geometry in the university of Cambridge. Vol. 1, 2 / ed. by William Grylls Adams. Sc. D., F.R.S. with a mamoir by J. W. L. Glaisher. Sc.D., F.R.S. Cambridge : University press, 1896, 1900. 500 p. + 643 p.

И. В. Игнатушина

О ЧИСЛАХ БЕРНУЛЛИ В «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ» ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Понятие чисел Бернулли в современной математике вводится с помощью многочленов Бернулли [1, с. 46]. Эти многочлены $B_k^{(n)}(x)$ порядка $n = 0; 1; 2; \ldots$ и степени k определяются из разложения производящей функции $\frac{t^n e^{xt}}{\left(e^t - 1\right)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} B_k^{(n)}(x) \frac{t^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Числа $B_k^{(n)}(0) = B_k^{(n)}$ называются числами Бернулли порядка n; имеем:

$$\frac{t^n}{\left(e^t - 1\right)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Получаем последовательность чисел:

$B_0^{(n)} = 1$; $B_1^{(n)} = -\frac{1}{2}n$; $B_2^{(n)} = \frac{1}{12}n(3n-1)$;

$B_3^{(n)} = -\frac{1}{8}n^2(n-1)$;

$B_4^{(n)} = \frac{1}{240}n(15n^3 - 30n^2 + 5n + 2)$;

$$B_5^{(n)} = -\frac{1}{96} n^2 (n-1)(3n^2 - 7n - 2);$$

$$B_6^{(n)} = \frac{1}{4032} n(63n^5 - 315n^4 + 315n^3 + 91n^2 - 42n - 16);$$

…

Числа Бернулли порядка 1 обычно просто называют числами Бернулли $B_k^{(1)} = B_k$:

$$B_0 = 1;\ B_1 = -\frac{1}{2};\ B_2 = \frac{1}{6};\ B_3 = 0;\ B_4 = -\frac{1}{30};\ B_5 = 0;$$
$$B_6 = \frac{1}{42};\ B_7 = 0;\ B_8 = -\frac{1}{30};\ B_9 = 0;\ \ldots \qquad (1)$$

Они обладают следующими свойствами:

1) все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1, равны нулю (т.е. $B_3 = B_5 = \ldots = 0$);

2) знаки чисел Бернулли с четными номерами чередуются;

3) рекуррентное соотношение, позволяющее находить эти числа, имеет вид:

$$B_0 = 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_n^k B_k}{n!} = 0, \text{ где } n \geq 2; \qquad (2)$$

4) из равенства (2) можно получить удобную формулу для отыскания чисел Бернулли:

$$(B+1)^n = B^n, \qquad (3)$$

где все показатели степеней у чисел B после развертывания бинома нужно заменить нижними индексами.

Числа такого вида впервые появились в связи с задачей о вычислении суммы одинаковых степеней натуральных чисел $S_m = \sum_{x=1}^{n-1} x^m$, которая была рассмотрена Якобом Бернулли (1654—1705). В своей работе «Искусство предположений», изданной в 1713 году, Я. Бернулли привел общее выражение для нахождения S_m, имеющее в современных обозначениях вид:

$$\sum_{x=1}^{n-1} x^m = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{m!\,B_{m+1-k}}{k!(m+1-k)!} n^k \,. \qquad (4)$$

Кроме того, он вывел рекуррентное правило, равносильное (2), позволяющее вычислять эти числа: сумма всех коэффициентов в правой части выражения (4) равна единице [2, с. 86].

Леонард Эйлер применил числа Бернулли в теории конечных разностей и показал их свойства. Некоторые из этих результатов он изложил в своем сочинении «Дифференциальное исчисление» [3], вышедшем в свет в 1755 г. Следует заметить, что термином «числа Бернулли» Эйлер называл абсолютные величины четных членов последовательности (1), т. е. $|B_2|, |B_4|, |B_6|, \ldots$ В «Дифференциальном исчислении» им предложено шесть способов для нахождения чисел Бернулли.

I способ

В главе I первой части «Дифференциального исчисления» [3, с. 57—63] Эйлер находит разности степеней x^n, т.е. составляет приращения функции x^n:

$$\Delta x = (x+\omega) - x = \omega,$$

$$\Delta x^2 = (x+\omega)^2 - x^2 = 2\omega x + \omega^2,$$

$$\Delta x^3 = (x+\omega)^3 - x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3,$$

$$\Delta x^4 = (x+\omega)^4 - x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x + 4\omega^2 x + \omega^4,$$

. . . . . .

Отсюда при $\omega = 1$ он получает

$$\Delta x = 1,$$

$$\Delta x^2 = 2x + 1,$$

$$\Delta x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$$

$$\Delta x^4 = 4x^3 + 6x + 4x + 1,$$

. . . . . .

В главе II первой части [3, с. 79—81] Эйлер «обращает найденные разности», т.е. из известного уравнения $z = \Delta y$

отыскивает значение $y = \sum z$. Таким образом, он выводит:

$$\sum x^0 = \sum 1 = x,$$

$$\sum x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x,$$

$$\sum x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2, \qquad (5)$$

$$\sum x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x,$$

$$\sum x^5 = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2,$$

$$\sum x^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x,$$

. . . . . .

Вычисление ведется до $\sum x^{16}$ включительно.

Коэффициенты, стоящие при x в равенствах (5), составляют последовательность чисел Бернулли.

Далее, обозначив через $S \cdot X$ «суммационный член ряда» (т.е. n-ю частичную сумму ряда), общий член которого есть X, Эйлер устанавливает что, так как $X = \Delta(S - X)$, то $\sum X = S - X$. Отсюда

$$S = \sum X + X + C, \qquad (6)$$

где постоянная С берется таким образом, чтобы суммационный член исчезал при $x = 0$.

Используя равенства (5) и (6), он находит n-е частичные суммы ряда

$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + x^n + \ldots$:

$$Sx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2},$$

$$
\begin{aligned}
Sx^2 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x, \\
Sx^3 &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2, \\
Sx^4 &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x, \\
Sx^5 &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2, \\
Sx^6 &= \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Вычисление Эйлер производит до Sx^{16} включительно.

Очевидно, что коэффициенты, стоящие при x в равенствах (7), тоже составляют последовательность чисел Бернулли.

II способ

Эйлер замечает в равенствах (7) следующую рекуррентную зависимость [3, с. 81—82]: если записать

$$Sx^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} + \ldots,$$

тогда

$$
\begin{aligned}
Sx^{n+1} = {} & \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \\
& + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} + \ldots
\end{aligned}
$$

При этом если в выражении суммы Sx^n показатель степени n — четное число, то получается верное выражение следующей суммы Sx^{n+1}; если n — нечетное, то в последующей сумме Sx^{n+1} нужно определить последний член, который будет иметь вид $\pm\varphi x$. Для этого следует положить $x = 1$, тогда получится сумма только одного члена, а он равен 1. Отсюда находится φ.

Например, если $n = 5$, то

$$Sx^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2,$$

и, следовательно,

$$Sx^6 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^5 + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^4 - \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3 + \varphi x.$$

При $x = 1$, получим $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi$, а отсюда $\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Значения φ, найденные таким образом, и есть числа Бернулли.

III способ

В главе V второй части [3, с. 281—284] Эйлер установил, что суммационный член ряда можно записать в следующем виде:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2!}S\frac{dz}{dy} - \frac{1}{3!}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{4!}S\frac{d^3z}{dx^3} - \ldots \qquad (8)$$

Далее, полагая

$$Sz = \int zdx + \alpha z + \beta\frac{dz}{dx} + \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \delta\frac{d^3z}{dx^3} + \ldots \qquad (9)$$

и применив здесь к каждому слагаемому, стоящему в правой части, соотношение (8), он получает:

$$\begin{aligned}
\int zdx &= Sz - \frac{1}{2!}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{3!}S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{4!}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{5!}S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots \\
\alpha z &= \alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots \\
\beta\frac{dz}{dx} &= \beta S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots \qquad (10) \\
\gamma\frac{d^2z}{dx^2} &= \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots \\
\delta\frac{d^3z}{dx^3} &= \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Заменяя каждое из слагаемых в правой части (9) соответствующим из равенств (10), он приходит к равенству:

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{1}{2!}S\frac{dz}{dx}+\frac{1}{3!}S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{4!}S\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{5!}S\frac{d^4z}{dx^4}-\ldots \\
+\ \alpha S\frac{dz}{dx}-\frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4}+\ldots \\
+\qquad\qquad \beta S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4}-\ldots \\
+\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma S\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4}+\ldots \\
+\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \delta S\frac{d^4z}{dx^4}-\ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}=0.$$

Тогда

$$\alpha-\frac{1}{2!}=0;\quad \beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3!}=0;\quad \gamma-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{6}-\frac{1}{4!}=0;\ldots\ ,$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{2};\ \beta=\frac{1}{12};\ \gamma=0;\ \delta=-\frac{1}{720};\ \varepsilon=0;\ \ldots \qquad (11)$$

Эти числа, как отмечает Эйлер, связаны с числами Бернулли следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_2&=\beta\cdot 2!=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot 6=\frac{1}{6},\\
B_4&=\delta\cdot 4!=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{720}\right)\cdot 5!=-\frac{1}{30},\\
B_6&=\zeta\cdot 6!=\frac{1}{42},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (12)$$

IV способ

Найденные числа (11) образуют рекуррентную последовательность. Чтобы установить закон рекурсии, Эйлер рассматривает [3, с. 285—287] ряд:

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{24}u^3+\frac{1}{120}u^4-\ldots}=V.$$

Учитывая, что

$$e^{-u}=1-u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4-\frac{1}{120}u^5+\ldots$$

и, следовательно,

$$\frac{1-e^{-u}}{u}=1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{24}u^3+\frac{1}{120}u^4-\ldots,$$

он получает, что V имеет вид: $V=\dfrac{u}{1-e^{-u}}$.

Отсюда

$$V-\alpha u=V-\frac{1}{2}u=\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{u}{2}=\frac{u-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}e^{-u}u}{1-e^{-u}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}u\left(1+e^{-u}\right)}{1-e^{-u}}=\frac{u(e^{\frac{1}{2}u}+e^{-\frac{1}{2}u})}{2(e^{\frac{1}{2}u}+e^{-\frac{1}{2}u})}=$$

$$=\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+\ldots}{1+\frac{u^2}{4\cdot 6}+\frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 14}+\ldots}.$$

Отметим, что в этом разложении последние сомножители в соответствующих дробях числителя и знаменателя (т.е. 4, 8, 12,… и 6, 10, 14,…) отличаются на 4.

Приравняв $\dfrac{1+\dfrac{u^2}{2\cdot 4}+\dfrac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dfrac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+\ldots}{1+\dfrac{u^2}{4\cdot 6}+\dfrac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\dfrac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 14}+\ldots}$ к $1+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\ldots$, Эйлер получил, что коэффициенты нечетных степеней $\gamma,\varepsilon,\eta,\ldots$ все исчезают, а для коэффициентов при четных степенях справедлив следующий рекуррентный закон :

$$\beta=\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{12},$$

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\frac{\beta}{4\cdot 6}-\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}=-\frac{1}{720},$$

$$\zeta=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\frac{\delta}{4\cdot 6}-\frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}-\frac{1}{4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 14}=\frac{1}{30240},$$

. . . . . .

Эти значения попеременно положительны и отрицательны и связаны, как показано выше (12), с числами Бернулли.

Если припишем этим буквам, взятым через одну, отрицательные знаки, так что

$$Sz=\int zdx+\frac{1}{2}z-\beta\frac{dz}{dx}+\delta\frac{d^3z}{dx^3}-\zeta\frac{d^5z}{dx^5}+\ldots,$$

то значения $\beta,\delta,\zeta,\ldots$ определятся из дроби

$$\frac{1-\dfrac{u^2}{2\cdot 4}+\dfrac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\dfrac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+\ldots}{1-\dfrac{u^2}{4\cdot 6}+\dfrac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}-\dfrac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 14}+\ldots},$$

если её разложить в ряд $1+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\ldots$:

$$\beta=\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{12},$$

$$\delta=\frac{\beta}{4\cdot 6}-\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}=\frac{1}{720},$$

$$\zeta = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{\delta}{4\cdot 6} - \frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{1}{4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 14} = \frac{1}{30240},$$

. . . . . .

Теперь все члены будут положительны.

V способ

Положив $\beta = -A, \delta = -B, \zeta = -C, \ldots$, так что $Sz = \int zdx + \frac{1}{2}z + A\frac{dz}{dx} - B\frac{d^3z}{dx^3} + C\frac{d^5z}{dx^5} - \ldots$, для определения значений $A, B, C, D, \ldots$ Эйлер рассматривает [3, с. 287—289] ряд

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \ldots = s, \qquad (13)$$

который получается из разложения дроби

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \ldots}{u - \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 14} + \ldots} = \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2}ctg\frac{1}{2}u. \qquad (14)$$

Отсюда он приходит к уравнению $\frac{1}{2}u = arcctg\,2s$, которое после дифференцирования приводится к виду:

$$4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0. \qquad (15)$$

Далее Эйлер преобразует выражение (15), пользуясь разложением (13).

Так как $s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \ldots$, то первый член выражения (15) имеет вид:

$$4\frac{ds}{du} = -\frac{4}{u^2} - 4A - 3\cdot 4Bu^2 - 5\cdot 4Cu^4 - \ldots,$$

третий член выражения (15) можно записать так:

$$4s^2 = \frac{4}{u^2} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \ldots +$$

$$+ 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \ldots$$

$$+ 4B^2u^6 + \ldots +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Затем в силу соотношения (15) производится суммирование и, приравнивая суммы однородных членов нулю, Эйлер имеет:

$$A = \frac{1}{12},\quad B = \frac{A^2}{5},\quad C = \frac{2AB}{7},\quad D = \frac{2AC + B^2}{9},$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11},\quad F = \frac{2AF + 2BD + C^2}{13},\ldots$$

Далее он отмечает, что так как знаменатели этих дробей очень велики и это мешает при вычислениях, то вместо букв $A, B, C, D, \ldots$ удобнее ввести новые буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ следующим образом:

$$A = \frac{\alpha}{3!},\quad B = \frac{\beta}{5!},\quad C = \frac{\gamma}{7!},\quad D = \frac{\delta}{9!},\quad E = \frac{\varepsilon}{11!},\ldots\ ,$$

тогда

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \beta = \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{6},\quad \gamma = 2\cdot\frac{3}{3}\alpha\beta = \frac{1}{6},$$

$$\delta = 2\cdot\frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8}{4}\cdot\frac{7}{5}\beta^2 = \frac{3}{10},$$

$$\varepsilon = 2\cdot\frac{5}{3}\alpha\delta + 2\frac{10\cdot 9\cdot 8}{5!}\beta\gamma = \frac{5}{6},\ldots$$

Здесь же указывается, что связь между числами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ удобнее выразить следующими формулами:

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \beta = \frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{2},\quad \gamma = \frac{6}{3}\alpha\beta,\quad \delta = \frac{8}{3}\alpha\gamma + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 5}\frac{\beta^2}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{10}{3}\alpha\delta + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 4\cdot 5}\beta\gamma,$$
$$\zeta = \frac{12}{3}\alpha\varepsilon + \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5}\beta\delta + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\frac{\gamma^2}{2},\ldots \qquad (16)$$

С помощью закона составления этих чисел значения $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$ вычисляются без труда:

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{6},\ \gamma = \frac{1}{6},\ \delta = \frac{3}{10},\ \varepsilon = \frac{5}{6},\ \zeta = \frac{691}{210},\ \ldots$$

Здесь Эйлер впервые применил термин «числа Бернулли», имея в виду абсолютные величины четных членов последовательности $|B_2|$, $|B_4|$, $|B_6|$, … Он указывает, что $|B_2|$, $|B_4|$, $|B_6|$, … получаются в результате деления $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$ соответственно на 3, 5, 7, 9,…

VI способ

Буквами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, … Эйлер обозначил числа $|B_2|,|B_4|,|B_6|,\ldots$ Тогда из равенств (16) он получает [3, с. 290, 304] следующие уравнения для их определения:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1666666666666,$$
$$\mathfrak{B} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}\mathfrak{A} \approx 0{,}0333333333333,$$
$$\mathfrak{C} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{7}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \approx 0{,}0238095238095,$$
$$\mathfrak{D} = \frac{8\cdot 7}{2!}\cdot\frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}\frac{1}{9}\mathfrak{B}^2 \approx 0{,}0333333333333,$$
$$\mathfrak{E} = \frac{10\cdot 9}{2!}\frac{2}{11}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}\frac{2}{11}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \approx \qquad (17)$$
$$\approx 0{,}0757575757575,$$
$$\mathfrak{F} = \frac{12\cdot 11}{2!}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{B}\mathfrak{D} +$$
$$+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6!}\cdot\frac{1}{13}\mathfrak{C}^2 \approx 0{,}2531135531135,$$
. . . . . .

или в современных обозначениях:

$$A_1 = \frac{1}{6};$$

$$A_2 = \frac{1}{5} C_4^2 A_1;$$

$$A_3 = \frac{2}{7} C_6^2 A_1 A_2;$$

$$A_4 = \frac{2}{9} C_8^2 A_1 A_3 + \frac{1}{9} C_8^4 A_2{}^2,$$

$$A_5 = \frac{2}{11}\left(C_{10}^2 A_1 A_4 + C_{10}^4 A_2 A_3\right),$$

$$A_6 = \frac{2}{13}(C_{12}^2 A_1 A_5 + C_{12}^4 A_2 A_4) + \frac{1}{13} C_{12}^6 A_3{}^2,$$

. . . . . .

$$A_{2k} = \frac{1}{4k+1}\left(C_{4k}^2 A_{2k-1} A_1 + C_{4k}^4 A_{2k-2} A_2 + \ldots + C_{4k}^{2k-2} A_1 A_{2k-1} + C_{4k}^{2k} A_{2k}{}^2\right),$$

$$A_{2k+1} = \frac{1}{4k+3}\left(C_{4k+2}^2 A_{2k} A_1 + C_{4k+2}^4 A_{2k-1} A_2 + \ldots + C_{4k+2}^{2k} A_1 A_{2k}\right),$$

. . . . . .,

где $A_1 = |B_2|;\ A_2 = |B_4|;\ A_3 = |B_6|;\ldots$

Полученные рекуррентные соотношения можно трактовать как одно из свойств чисел $|B_2|, |B_4|, |B_6|, \ldots$ Рассмотрим другие свойства этих чисел, изложенные в «Дифференциальном исчислении».

1 свойство

В § 124—125 главы V второй части [3, с. 291—292] Эйлер вывел следующие соотношения:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \mathfrak{a} = \frac{2}{2!}\pi^2 \mathfrak{A},$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \mathfrak{b} = \frac{2^3}{4!}\pi^4 \mathfrak{B}, \qquad (18)$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \mathfrak{c} = \frac{2^5}{6!}\pi^6 \mathfrak{C},$$

. . . . . .

и тем самым показал связь чисел Бернулли со значениями дзета-функции $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^S}$ при четных $s=2m$:

$$\zeta(2m)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2n)!}\,|B_{2m}|\,.$$

Отметим, что это свойство было установлено Эйлером не позднее 1740 г., о чем свидетельствует заметка на л. 169 об. из записной книжки № 131 [5], датируемой 1736—1740 гг., где имеются соотношения (18) [6, 7]. В этой же заметке содержатся значения коэффициентов при $\pi^2,\pi^4,\pi^6,\ldots$ разложений (18). Кроме того, их Эйлер привел в письме к Джеймсу Стирлингу (1692—1770) от 8 июня 1736 г. [4, с. 124] и в более позднем письме от 12 сентября 1740 г. [8, с. 179—192] к Филиппу Ноде (1684—1745).

Рассмотрим ход рассуждений Эйлера по установлению равенств (18), предложенный в «Дифференциальном исчислении».

Сначала рассматривается разложение:

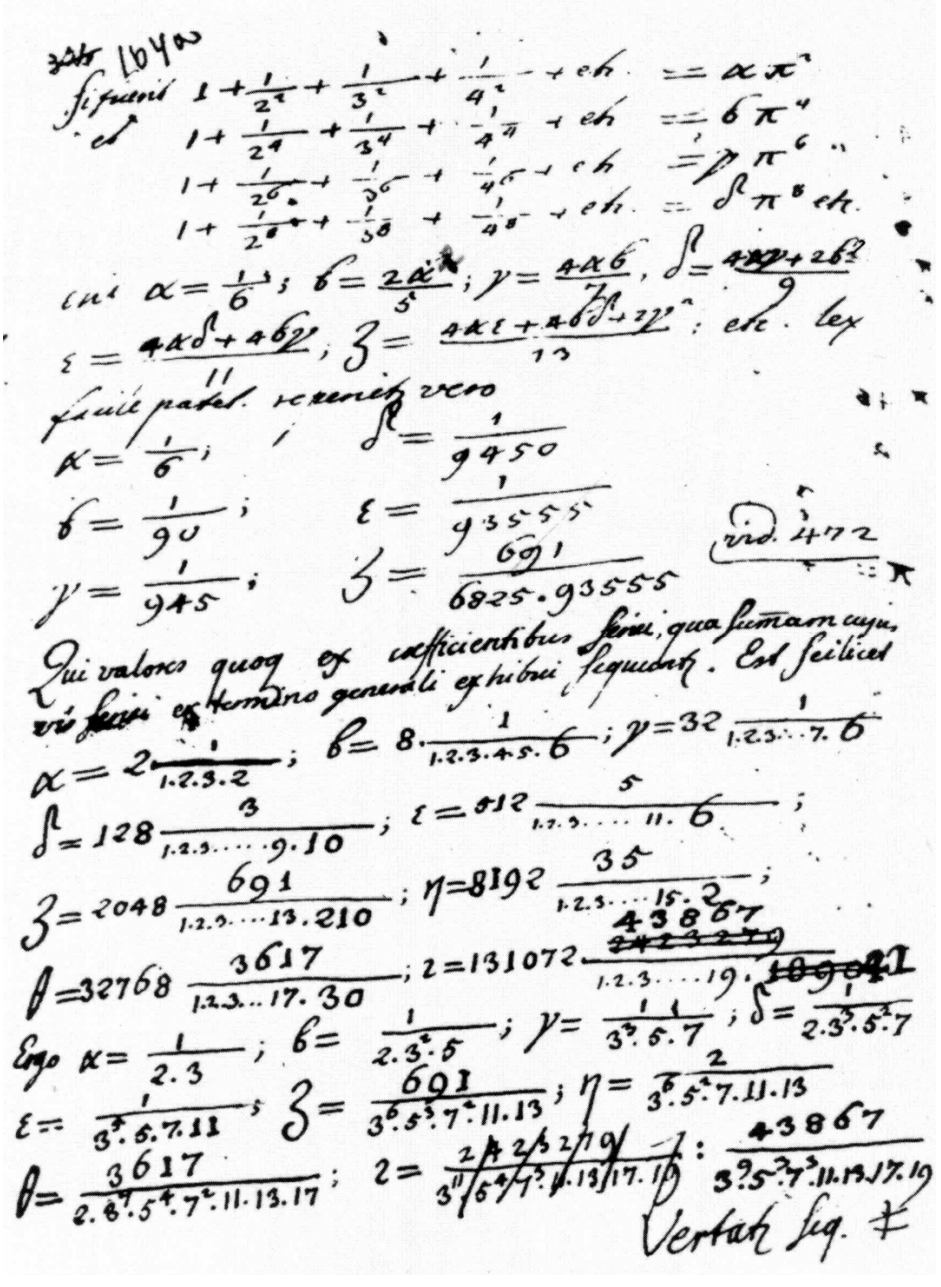
$$\frac{\pi}{n}ctg\frac{m}{n}\pi=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-$$
$$-\frac{2m}{16n^2-m^2}-\ldots,$$

откуда следует

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}ctg\frac{m}{n}\pi. \qquad (19)$$

Положив здесь $n=1$ и вместо m взяв u, Эйлер записывает (19) в виде:

$$\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{4-u^2}+\frac{1}{9-u^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2u^2}-\frac{\pi}{2u}ctg\pi u. \qquad (20)$$



Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 169 об.

Далее он разлагает каждую дробь из правой части (20) в ряд:

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \ldots,$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \ldots, \qquad (21)$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \ldots,$$

.....

Из (20) и (21) следует:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^5 + \ldots = \frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} ctg\pi u. \qquad (22)$$

Заменив в равенствах (13), (14) $\frac{1}{2}u$ на πu, он имеет:

$$\frac{1}{2} ctg\pi u = \frac{1}{2\pi u} - 2A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - \ldots$$

Отсюда, после умножения на $\frac{\pi}{u}$, следует

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} ctg\pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + \ldots$$

Используя равенство (22), Эйлер получает:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^5 + \ldots = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + \ldots$$

Таким образом, $\mathfrak{a} = 2A\pi^2$; $\mathfrak{b} = 2^3 B\pi^4$; $\mathfrak{c} = 2^5 C\pi^6$; …, а отсюда, учитывая, что $\mathfrak{A} = 2!A$; $\mathfrak{B} = 4!B$; $\mathfrak{C} = 6!C$;…, получаем соотношения (18).

2 свойство

В § 129 главы V второй части [3, с. 294] Эйлер доказывает, что числа $|B_2|, |B_4|, |B_6|, \ldots$ образуют сильно расходящуюся последовательность, которая расходится даже быстрее, чем любая геометрическая прогрессия, члены которой возрастают. Рассмотрим это доказательство.

Из таблицы значений (17) явствует, что эти числа сначала убывают, а затем возрастают и увеличиваются до бесконечности. Поэтому, как пишет Эйлер, «стоит труда исследовать, в каком отношении эти числа, после того как они продолжены уже достаточно далеко, продолжают расти дальше» [3, с. 294].

Пусть φ есть какое-либо число из последовательности чисел $|B_2|, |B_4|, |B_6|, \ldots$, очень далекое от начала, и пусть ψ следующее за ним число из этой последовательности.

Как показано выше, с помощью этих чисел определяются суммы обратных степеней (18). Пусть $2n$ есть показатель тех степеней, в сумму которых входит число φ:

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}\varphi}{(2n)!}\pi^{2n}; \qquad (23)$$

тогда $2n+2$ будет показатель степеней, отвечающих числу ψ:

$$1+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\frac{1}{4^{2n+2}}+\ldots=\frac{2^{2n+1}\psi}{(2n+2)!}\pi^{2n+2}. \qquad (24)$$

После деления (24) на (23) получается

$$\frac{1+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\frac{1}{4^{2n+2}}+\ldots}{1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots}=\frac{4\psi\pi^2}{(2n+2)(2n+1)\varphi}. \qquad (25)$$

Затем Эйлер отмечает, что так как n есть очень большое число, то каждый из рядов, стоящих в левой части (25), приближенно равен 1, и тогда

$$\frac{\psi}{\varphi}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4\pi^2}.$$

Отсюда, увеличивая n неограниченно, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi}{\varphi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{4\pi^2}=\infty.$$

3 свойство

В § 153 главы IV второй части [3, с. 312—313] Эйлер предлагает способ интерполирования последовательности чисел:

$$A_1 = |B_2|;\ A_2 = |B_4|;\ A_3 = |B_6|;\ldots \qquad (26)$$

Под интерполяцией здесь понимается отыскание членов, стоящих посередине между какими-нибудь двумя членами исходной последовательности.

Например, член, лежащий посередине между первым A_1 и вторым A_2 членами последовательности (26), т.е. член, отвечающий индексу $1\frac{1}{2}$, он обозначил символом p и, исходя из равенств (18), заключил, что справедливо соотношение: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{2^2 p}{3!}\pi^3$, а отсюда вывел

$$p=\frac{3}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)\approx 0{,}05815227\ .$$

Подобным образом, если член, лежащий посередине между A_2 и A_3, т. е. член, имеющий индекс $2\frac{1}{2}$, положить равным q, то, поскольку из равенств (3) следует $1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\ldots=\frac{2^4 q}{5!}\pi^5$, будем иметь

$$q=\frac{15}{2\pi^5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\ldots\right)\approx 0{,}02541327\ .$$

Аналогично находятся члены с индексами $3\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{2};\ 5\frac{1}{2};\ldots$

4 свойство

Числа $A_1 = |B_2|;\ A_2 = |B_4|;\ A_3 = |B_6|;\ldots$, деленные соответственно на 2!, 4!, 6!, …, являются коэффициентами в так называемой формуле суммирования Эйлера — Макло-

рена, которая была получена Эйлером еще в 1735 г. в следующем виде:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2} + A_1 \frac{dz}{2!\,dx} - A_2 \frac{d^3 z}{4!\,dx^3} + A_3 \frac{d^5 z}{6!\,dx^5} + \ldots, \quad (27)$$

где Sz есть сумма первых x членов ряда $z(1) + z(2) + \ldots + z(x) + \ldots$

В принятых в настоящее время обозначениях формула суммирования Эйлера — Маклорена имеет вид:

$$\sum_{k=p}^{m-1} \varphi(k) = \int_p^m \varphi(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \left\{ \varphi^{(\nu-1)}(m) - \varphi^{(\nu-1)}(p) \right\} + R_n,$$

где B_ν — числа Бернулли, а R_n — остаточный член, выражаемый равенством:

$$R_n = -\frac{1}{n!} \int_0^1 \left[B_n(t) - B_n \right] \sum_{k=p}^{m-1} \varphi^{(n)}(k + 1 - t) dt,$$

в котором $B_n(t)$ — многочлены Бернулли:

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k t^{-k} n!}{k!(n-k)!}, \quad B_n(0) = B_n.$$

Разложение (27) Эйлер сообщил в июне 1735 г. в письме к Карлу Готлибу Элеру [8, с. 292]. Кроме того, о своем открытии он сообщил Стирлингу в письме от 8 июня 1736 г. [4, с. 121]. В «Дифференциальном исчислении» формула (27) содержится в V главе второй части [3, с. 295].

5 свойство

В § 159 главы VI второй части [3, с. 317—318] Эйлер, используя формулу (27), нашел разложение логарифма Г-функции

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} n^z, \text{ где } z \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

в следующем виде:

$$\ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{1 \cdot 2x} A_1 -$$

$$-\frac{1}{3\cdot 4x^3}A_2+\frac{1}{5\cdot 6x^5}A_3-\frac{1}{7\cdot 8x^7}A_4+\ldots,$$

где $A_1=|B_2|;\ A_2=|B_4|;\ A_3=|B_6|;\ldots$

Это разложение эквивалентно ряду Стирлинга:

$$\ln\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2x}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6x^5}-\ldots,$$

которое встречается в записной книжке № 132 (л. 233 об.), датируемой 1740—1744 гг. [9, 10]. По-видимому, указанная заметка является фрагментом черновых записей письма Эйлера от 23 июня 1744 г. [11, с. 197—198] к Христиану Гольдбаху (1690–1764).

Таким образом, в «Дифференциальном исчислении» Эйлер продемонстрировал широкое применение чисел Бернулли и изложил разные способы их нахождения, показывающие, как эти числа получаются при решении различных задач. Дальнейшие исследования, касающиеся чисел Бернулли, Эйлер отразил в мемуаре «О нахождении сумм рядов чисел Бернулли» [12], опубликованном в 1770 г.

Список литературы и источников

1. Корн Г., Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн ; пер. со 2-го американского перераб. изд. И. Г. Арамановича и др. ; под ред. И. Г. Арамановича. М. : Наука, 1973.

2. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 2 : Математика XVII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. М., 1970. 299 с.

3. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер ; пер. с лат., вступ. ст. и примеч. М. Я. Выгодского. М. ; Л., 1949. 579 с.

4. Красоткина Т. А. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга / Т. А. Красоткина // Историко-математические исследования. М., 1957. Вып. X. С. 117—158.

5. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

6. Матвиевская Г. П. Заметки, относящиеся к аналитической теории чисел, рядам и цепным дробям / Г. П. Матвиевская, В. Д. Горлова // Историко-математические исследования. М., 1999. Вып. 3 (38). С. 315—361.

7. Горлова В. Д. Неопубликованные материалы Эйлера по аналитической теории чисел. Элементы теории дзета-функции в его записных книжках : автореф. … дис. канд. физ.-мат. наук / В. Д. Горлова. Оренбург, 1998.

8. Эйлер Л. Письма к ученым / Л. Эйлер ; ред. В. И. Смирнов. М. ; Л., 1967. 397 с.

9. Игнатушина И. В. Вопросы теории Г-функции в записных книжках Л. Эйлера / И. В. Игнатушина // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2002. Вып. 3. С. 30—53.

10. Игнатушина И. В. Формирование основ теории гамма-функции в трудах, переписке и записных книжках Л. Эйлера / И. В. Игнатушина // Историко-математические исследования. М., 2003. Вып. 8 (43). С. 140—161.

11. Juškevic A. P. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764 / A. P. Juškevic, E. Winter. Berlin : Akademie-Verlag, 1965.

12. Euler L. De summis serierum numeros Bernoullianos involventium (1769) 1770 / L. Euler // Opera omnia. Ser. I. Vol. 15. 1927. S. 91—130. (E393).

И. В. Игнатушина

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Дифференциальная геометрия — раздел математики, в котором геометрические образы (кривые, поверхности, а также их семейства) изучаются методами математического анализа. Её можно условно разделить на три части: первая изучает свойства кривых на плоскости; вторая — свойства пространственных кривых; третья — поверхности.

Дифференциальная геометрия возникла в XVIII в., когда в математике уже широко применялось созданное Исааком Ньютоном (1643—1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716) дифференциальное и интегральное исчисление. Однако она имеет длительную предысторию.

Первые исследования, связанные с изучением касательных и нормалей к немногим простейшим плоским кривым (преимущественно коническим сечениям) и нахождением площадей и объемов, встречаются еще в древнегреческой математике. Например, в сочинении Архимеда (ок. 287—212 до н. э.) «О спиралях» предложен метод нахождения касательной к спирали, который ретроспективно может быть оценен как дифференциальный. Суть этого метода заключается во введении достаточно малого треугольника, играющего роль дифференциального треугольника.

В работах ученых XVII века Рене Декарта (1596—1650), И. Ньютона, Г. В. Лейбница, Христиана Гюйген-

са (1629—1695), братьев Бернулли, Якоба (1654—1705) и Иоганна (1667—1748), и других были решены многие конкретные вопросы теории плоских кривых.

Так, Декарт в своей «Геометрии» (1637) опубликовал способ проведения касательных и нормалей к алгебраическим кривым, разработанный им в 1629 г. в связи с занятиями оптикой. Прием Декарта опирался на аппарат аналитической геометрии, созданный им одновременно с Пьером Ферма (1601—1665). Для определения положения нормали в данной точке M кривой Декарт описывал окружность из предполагаемой точки N пересечения нормали с осью абсцисс и для отыскания этой точки N требовал, чтобы две точки пересечения окружности и кривой сливались в одну в точке M. Это требование накладывало определенные условия на коэффициенты уравнения, служащего для отыскания координат точек пересечения кривой и окружности (корни должны быть кратными), и позволяло найти абсциссу точки N. Однако эти чисто алгебраические методы были весьма громоздкими и не годились для трансцендентных или, как тогда говорили, «механических» кривых. Поэтому для построения касательной к циклоиде Декарт предложил новый кинематический прием, опирающийся на то, что нормаль к этой кривой проходит через точку касания порождающей циклоиду окружности с прямой, по которой эта окружность катится.

Другой частный кинематический метод построения касательной был предложен Жилем Робервалем (1602—1675) и Эванджелистой Торричелли (1608—1647).

Гюйгенс, отыскивая кривую, по которой должен двигаться конец маятника, чтобы выполнялось условие изохронности, пришел к теории эволют и эвольвент и фактически ввел понятие радиуса кривизны. Кроме того, при решении некоторых задач оптики он вплотную подошел к понятию огибающей.

В работах Ньютона, Лейбница и братьев Бернулли кривые на плоскости рассматривались в связи с определением касательных, экстремумов, выпуклостей, вогну-

тостей и точек перегиба, а также при изучении роговидных углов. Ньютону принадлежат термины «центр» и «радиус кривизны».

Итак, к началу XVIII века были решены некоторые вопросы из первого раздела дифференциальной геометрии — теории плоских кривых, и начаты исследования пространственных кривых и поверхностей.

В XVIII веке наиболее значительные результаты в формирующейся дифференциальной геометрии были достигнуты Леонардом Эйлером (1707—1783), Гаспаром Монжем (1746—1818) и Алексисом Клодом Клеро (1713—1768). Настоящая статья посвящена творчеству Эйлера, которое сыграло основополагающую роль в указанной области геометрии.

К рассмотрению вопросов дифференциальной геометрии Эйлера привели два пути: первый связан с формированием математического анализа и рассмотрением его приложений к геометрии (т.е. вызванный внутренним развитием математической теории), а второй — с решением задач картографии и геодезии (т.е. с потребностями практики).

Исследования по дифференциальной геометрии Эйлер начал в 1728—1732 гг. с изучения геодезических линий. Эту проблему в 1728 г. поставил перед ним в своем письме И. Бернулли, после чего молодой петербургский ученый вывел дифференциальное уравнение геодезических линий:

$$\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

где P и Q определяются из дифференциального уравнения поверхности $Pdx = Qdy + Rdt$. Полученный результат Эйлер сообщил И. Бернулли в ответном письме 18 февраля 1729 г. Кроме вывода общего уравнения, Эйлер подробно рассмотрел геодезические линии на цилиндрических, конических поверхностях и поверхностях вращения. Впоследствии он неоднократно возвращался к этой проблеме. Во втором томе «Механики, или Науки о движении, изложенной аналитически» (1736) он доказал, что точка, дви-

жущаяся по поверхности при отсутствии действующих сил, перемещается по геодезической линии; при этом было показано, что главная нормаль к геодезической в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности.

Многие работы Эйлера по дифференциальной геометрии связаны с задачей о траекториях семейств кривых, т.е. об определении кривых, пересекающих кривые данного семейства под постоянным углом или под углом, изменяющимся по определенному закону; в первом случае траектории называются изогональными, а в случае, когда угол прямой, — ортогональными. Задачей о разыскании траекторий, также поставленной И. Бернулли в 1697 г., занимался и Николай II Бернулли — сын Я. Бернулли (1695—1726).

Этой проблеме были посвящены некоторые ранние работы Эйлера: «Метод нахождения алгебраических взаимных траекторий» (1727) [8], «Решение задачи о взаимных траекториях» (1727) [9], «О спрямляемых алгебраических кривых и взаимных траекториях» (1730) [10]. Здесь рассматривается задача: найти такое семейство параллельных кривых $y = f(x) + C$, чтобы кривые симметричного ему по отношению к оси OY семейства $y = f(-x) + c$ явились изогональными траекториями. Эйлер отыскивает простейшие алгебраические кривые, обладающие таким свойством.

В работе «Соображения об ортогональных траекториях» (1769) [11] Эйлер продолжает начатое исследование и решает задачу по отысканию однопараметрических кривых, пересекающихся под прямым углом. Для этого он вводит функции комплексного переменного:

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{-1} &= f(T + V\sqrt{-1}), \\ x - y\sqrt{-1} &= f(T - V\sqrt{-1}). \end{aligned} \qquad (*)$$

Ортогональные семейства линий могут быть получены этими преобразованиями из ортогональных семейств прямых $T = const$ и $V = const$. Преобразование (*) является конформным, а функции, задающие его, аналитическими. В конце указанной работы Эйлер доказывает, что дробно-

линейная функция комплексного переменного преобразует прямые в окружности.

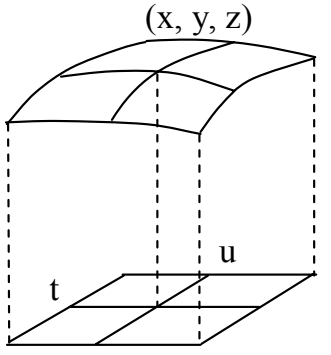
Таким образом, Эйлер впервые ввел в рассмотрение функции комплексной переменной, применил их для конформных отображений и положил начало способу отыскания изометрических сеток координат.

Первый, кто перенес методы, использовавшиеся для исследования кривых на плоскости, на трехмерный случай, был А. К. Клеро (1713—1768). Он рассмотрел касательные и нормали к пространственным кривым, ввел касательную плоскость к поверхности, содержащей данную кривую. В его работе «Исследования о кривых двоякой кривизны» (1731) впервые встречается формула элемента длины пространственной кривой в виде $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Однако решение рассмотренных им задач в основном требовало простой замены двух переменных тремя.

Изучению дифференциальной геометрии пространственных кривых посвящен мемуар Эйлера «Легкий способ исследовать все свойства кривых линий, не расположенных в одной плоскости» (1782) [12]. Здесь он рассмотрел координаты (x, y, z) точки кривой как функции длины дуги s и направляющих коэффициентов p, q, r подвижного триэдра, а также доказал первую формулу Ж. Френе: $\frac{dt}{ds} = kn$, где k — кривизна кривой.

К рассмотрению пространственных задач дифференциальной геометрии Эйлера привели и проблемы картографии. Результаты изучения вопроса о развертывающихся поверхностях Эйлер опубликовал в мемуаре «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость» (1771) [13]. Здесь впервые было введено и само понятие развертывающейся поверхности, т. е. поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. Эйлер исходил из того, что бесконечно малый треугольник на такой поверхности должен быть конгруэнтен соответствующему треугольнику на плоскости, на которую он раз-

вертывается. Он представляет координаты *x, y, z* точки на поверхности как функции от двух переменных *t* и *u*, где *t* и *u* являются координатами соответствующей точки на плоскости. Таким образом Эйлер ввел так называемые Гауссовы (или изометрические) координаты.



Точкам (*t*+*dt, u*) и (*t, u*+*du*) плоскости соответствуют точки поверхности, координаты которых имеют вид:

$$x + ldt \quad , \quad x + \lambda du,$$

$$y + mdt \quad , \quad y + \mu du,$$

$$z + hdt \quad , \quad z + \nu du,$$

где $l = \dfrac{\partial x}{\partial t}$, $m = \dfrac{\partial y}{\partial t}$, $h = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\lambda = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\mu = \dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\nu = \dfrac{\partial z}{\partial u}$.

Наряду с применением параметрического представления поверхности Эйлер вводит в рассмотрение линейный элемент *ds* поверхности (т.е. дифференциал дуги линий на ней) как средство исследования тех свойств поверхности, которые впоследствии были названы внутренними и которые могут быть исследованы с помощью измерений на ней самой, без обращения к пространству, её содержащему. Эта идея получила дальнейшее глубокое развитие лишь начиная с Гаусса (1827).

Условие развертывания (или условие наложимости), полученное Эйлером, может быть сформулировано как условие совпадения линейного элемента развертывающейся поверхности $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ с линейным элементом плоскости $ds^2 = dt^2 + du^2$, т.е. при любых *du, dt* рас-

стояние между точками ($t+dt,\ u$) и ($t,\ u+du$) должно равняться расстоянию между соответствующими точками развертывающейся плоскости:

$$dt^2 + du^2 = (ldt - \lambda du)^2 + (mdt - \mu du)^2 + (hdt - \nu du)^2 .$$

Раскрыв скобки, получим:

$$dt^2 + du^2 = l^2 dt^2 - 2l\lambda dtdu + \lambda^2 du^2 + m^2 dt^2 - 2m\mu dtdu +$$
$$+ \mu^2 du^2 + h^2 dt^2 - 2h\nu dtdu + \nu^2 du^2 .$$

Отсюда получаем условия наложимости:

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + h^2 = 1, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ l\lambda + m\mu + h\nu = 0. \end{cases}$$

С современной точки зрения, это условия единичности и ортогональности векторов, координаты которых равны частным производным радиус-вектора точки поверхности по координатам $t,\ u$.

В этой работе Эйлер сформулировал и доказал теорему о том, что всякая развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо образована касательными к некоторой пространственной кривой.

Полученные результаты Эйлер применил в работах по картографии [7]: «Об изображении сферической поверхности на плоскости» (1777), «О географической проекции сферической поверхности» (1777), «О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи» (1777).

В первой из них он доказал невозможность конгруэнтно отобразить кусок сферы на плоскость. Здесь же рассмотрены такие отображения, при которых меридианы и параллели переходят во взаимно перпендикулярные прямые, а также конформные отображения (т.е. сохраняющие углы) и эквивалентные отображения (т.е. сохраняющие площади).

Во второй из указанных работ Эйлер рассматривает стереографическую проекцию сферы на плоскость, а затем

при помощи функции комплексной переменной конформно деформирует ее в плоскости и получает так называемую косую стереографическую проекцию.

В третьей работе подробно разбирается практический вопрос о проекции Николая Делиля (1688—1768), принятой в то время при вычерчивании карт Российской империи. Эта проекция равнопромежуточная, сохраняющая главный масштаб по меридианам, причем параллели, на которых сохраняется главный масштаб, берутся на равных расстояниях от средней и крайних параллелей изображенной территории. Эйлер исследовал искажения в проекции Делиля и предложил свою проекцию, в которой параллели сечений выбираются с условием, чтобы разности длин дуг на поверхности земного эллипсоида и его проекции были на крайних широтах изображаемой территории одинаковы и равнялись разности длин дуг на карте и в действительности для средней широты.

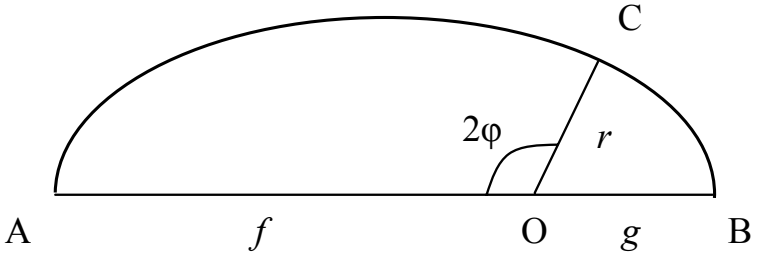
В мемуаре 1760 г. «Исследования о кривизне поверхностей» [14] содержатся существенно новые и важные результаты по теории поверхностей, а также из области трехмерной дифференциальной геометрии. До Эйлера было установлено только существование касательной плоскости в данной точке поверхности. Эйлер сделал определенный шаг вперед и пришел к теореме о кривизне поверхностей, теперь носящей его имя. Называя «главным сечением» поверхности $z = f(x, y)$ нормальное сечение, перпендикулярное к плоскости xOy, и изменяя угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью главного сечения, он нашел, что в каждой точке поверхности имеются нормальные сечения с максимальным радиусом кривизны f и с минимальным g. Эти сечения, как доказал Эйлер, перпендикулярны друг другу. Далее, обозначая через φ угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью нормального сечения с максимальным радиусом кривизны, он показал, что радиус кривизны r произвольного нормального сечения выражается через f и g по формуле:

$$r = \frac{2fg}{f + g + (f - g)\cos 2\varphi}. \qquad (3)$$

Полвека спустя Шарль Дюпен (1784—1873), преобразуя выражение (3), дал более употребляющуюся ныне формулу для обратной величины радиуса кривизны, т.е. для кривизны нормального сечения:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{f} + \frac{\sin^2\varphi}{g}.$$

В указанном мемуаре [14] Эйлер предложил следующее интересное построение радиуса кривизны r для сечения данного направления. Он строит отрезок $AB = f + g$ и на нем, как на большой оси, полуэллипс с фокусом в точке O, тогда, если угол $AOC = 2\varphi$, то $r = OC$ есть искомый радиус.



Здесь же показано, что, несмотря на все разнообразие поверхностей, искривленность регулярных поверхностей может быть всего лишь нескольких определенных типов.

Решение задачи о нахождении семейства поверхностей, ортогональных к данному однопараметрическому семейству поверхностей, представлено в его мемуаре 1782 г. «Об обобщении задачи об ортогональных траекториях на поверхности» [15] .

Содержание мемуаров Эйлера, посвященных вопросам дифференциальной геометрии, рассматривалось во вводных статьях А. Шпайзера [17] к соответствующим томам полного собрания сочинений Л. Эйлера («Leonhardi Euleri opera omnia»). Анализ некоторых из полученных им ре-

зультатов дан в работах Г. Вилейтнера [1], М. Я. Выгодского [2], Б. Н. Делоне [3], В. В. Котека [4], В. Коммереля [16], Б. А. Розенфельда [5], Д. Дж. Стройка [6] и др.

Но даже беглый просмотр работ Эйлера по дифференциальной геометрии, содержащихся в тт. 27—29 «Leonhardi Euleri opera omnia», показывает, что его роль в разработке этой области математики освещена недостаточно полно. Поэтому в дальнейшем мы планируем сначала подробно изучить его опубликованные работы (свыше 40) по данной тематике, а затем рассмотреть переписку и неопубликованные материалы из записных книжек ученого, где тоже содержатся результаты по дифференциальной геометрии.

Список литературы

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер ; пер. с нем. и ред. А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1966. 507 с.

2. Выгодский М. Я. Возникновение дифференциальной геометрии / М. Я. Выгодский // Гаспар Монж. Приложение анализа к геометрии / пер. с фр. В. А. Гуковской. М. ; Л. : ОНТИ, 1936. С. 1—70.

3. Делоне Б. Н. Эйлер как геометр / Б. Н. Делоне // Леонард Эйлер : сб. статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР / под ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. М. : АН СССР, 1958. С. 133—181.

4. Котек В. В. Геометрия / В. В. Котек // История отечественной математики с древнейших времен до конца XVIII в. / под ред. И. З. Штокало. Киев : Наукова думка, 1968. Т. I. Гл. VIII. Труды Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления, геометрии, теории вероятностей и теории чисел. С. 277—284.

5. Розенфельд Б. А. Геометрия / Б. А. Розенфельд // История математики. Математика XVIII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1972. Т. III. Гл. V. С. 153—221.

6. Стройк Д. Дж. Очерки истории дифференциальной геометрии до XX столетия / Д. Дж. Стройк. М. ; Л. : ОГИЗ, 1941. 80 с.

7. Эйлер Л. Избранные картографические статьи. Три статьи по математической картографии / Л. Эйлер ; пер. Н. Ф. Булаевского ; ред. и вступ. ст. Г. В. Багратуни. М. ; Л. : Геодезическая литература, 1959. 79 с.

8. Euler L. Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas [1727] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 1—5.

9. Euler L. Problematis trajectoriarum reciprocarum solutio [1729] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 6—23.

10. Euler L. De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis [1738] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 24—28.

11. Euler L. Considerationes de trajectoriis orthogonalibus [1770] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 99—119.

12. Euler L. Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi [1786] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 348—381.

13. Euler L. De solidis quorum superficiem in planum explicare licet [1772] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 161—186.

14. Euler L. Recherches sur la courbure des surfaces [1767] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 1—22.

15. Euler L. De problemate traiectoriarum orthogonalium ad superficies translato [1820] / L. Euler // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1956. Vol. 29. S. 276—308.

16. Kommerell V. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes / V. Kommerell // M. Cantor. Vorlesunger über Geschichte des Mathematik. Leipzig, 1908. B. IV. S. 453—576.

17. Speiser A. Übersicht über die im Bände 27, 28, 28 der ersten Serie enthaltenen abhandlungen / A. Speiser // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. VII—XLVI; 1955. Vol. 28. S. VII—XLIV; 1956. Vol. 28. S. VII—XLII.

Л. Н. Курбатова

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ТЕЛАХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ

В одном ряду со знаменательными открытиями Леонарда Эйлера в области математического анализа и его приложений, теории чисел, алгебры, дифференциальной геометрии стоит знаменитая теорема, получившая название теоремы о многогранниках.

Возможно, первоначальной его задачей была классификация многогранников, так как классификация многоугольников проходила очень легко: по числу сторон, равному числу углов.

Ключом к решению задачи у Эйлера послужило понятие *вершины* и *ребра*. Он первый показал, что кроме числа граней (hedro) число точек и линий на поверхности многогранника определяет его характер. Для обозначения вершин Эйлер применяет термин «*angulus solidus*» (телесный угол), которым до него широко пользовались, для ребер многогранников вводит термин «*acies*» вместо «*latus*» (сторона), который использовали при работе с многоугольниками, подчеркивая тем самым, что формула, связывающая число вершин (S), ребер (A) и граней (H),

$$S + H = A + 2 ,$$

является важной характеристикой многогранника.

Эту теорему, наряду с другими геометрическими предложениями, Эйлер сообщил в письме к Хр. Гольдбаху от 14 ноября 1750 г. и опубликовал в двух специальных статьях в «Novi Commentarii» Петербургской Академии наук за 1752—1753 (1758) гг. и кратко коснулся в третьей, обсуждая вопрос о сумме телесных углов тетраэдра.

Возможно, эта формула была известна Рене Декарту. В рукописи Декарта (ок. 1620 г.), скопированной с оригинала Лейбницем в Париже в 1675—1676 гг. и снова открытой и опубликованной Foucher de Careil в 1860 г., устанавливается, что число плоских углов равно $2\varphi + 2a - 4$, где за φ обозначено число граней, a — число телесных углов. Кроме этого, там же устанавливается, что плоских углов вдвое больше, чем ребер (*latera*). Если соединить эти два предложения, то получится формула Эйлера. Однако Декарт этого следствия не опубликовал, исследуя в основном зависимости между углами (плоскими и телесными) многогранника [1].

В первом из мемуаров «Элементы о телах» [3] высказано следующее предположение: *«У всякого тела, ограниченного плоскими гранями, сумма числа телесных углов и числа граней на два превышает число ребер. Следовательно, если положить число телесных углов равным S, число ребер равным A, число вершин равным H, (то)* $S + H = A + 2$ *»*.

Эйлер проверяет простым подсчетом это соотношение для произвольной пирамиды, клинообразных тел, тел, ограниченных двумя основаниями с одинаковым числом сторон, для тел, ограниченных двумя основаниями с неодинаковым числом сторон, тел, составленных из двух различных тел предыдущих классов, сложенных вместе общим основанием, пяти правильных многогранников.

Это рассмотрение завершается замечанием: *«А так как справедливость предложения подтверждается для*

всех этих случаев, то нет сомнения, что оно имеет место для всех пространственных тел и, кажется, предложение достаточно доказано».

Таким образом, доказательства найденного соотношения в первом мемуаре Эйлер не дает, но выводит из него несколько следствий.

• Нет многогранника, в котором число ребер, увеличенное на шесть, было бы больше, чем утроенное число вершин или граней, т. е. справедливы неравенства

$$A + 6 \le 3S \text{ и } A + 6 \le 3H.$$

• Нет многогранника, в котором число граней, увеличенное на четыре, было бы больше, чем удвоенное число вершин или число вершин, увеличенное на четыре, было бы больше удвоенного числа граней, т. е. справедливы неравенства

$$H + 4 \le 2S \text{ и } S + 4 \le 2H.$$

Эти следствия указывают на необходимые условия существования многогранника с S вершинами, A ребрами и H гранями. Как показал в начале XX века Эрнст Штейниц, эти условия и достаточны для существования выпуклых многогранников [2].

• Всякий многогранник имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань и хотя бы один треугольный, четырехугольный или пятиугольный телесный угол.

• Сумма плоских углов всех граней многогранника равна

$$S \cdot 4d + 8d,$$

где S — число вершин многогранника.

Используя неравенства первых двух следствий, Эйлер вычисляет таблицы, дающие верхние и нижние границы для числа вершин или ребер многогранника, если дано число его граней и верхние и нижние границы для числа граней и вершин многогранника, если дано число его ре-

бер. Кроме того, указывается таблица возможного числа граней и ребер многогранника, если указано число его вершин, в которой каждый из многогранников снабжен своим названием.

Во втором мемуаре «Доказательство некоторых замечательных свойств, которыми обладают тела, ограниченные плоскими гранями» Эйлер обосновывает формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника [4]. Для доказательства он удаляет телесные углы многогранника так, чтобы при их удалении не образовывались новые телесные углы, кроме уже имеющихся. К этому доказательству Эйлер обращается дважды.

В XVI томе «Историко-математических исследований» (1965) Ю. А. Белый приводит обнаруженный в одной из «Записных книжек» Эйлера и не публиковавшийся до этого вариант доказательства теоремы [5].

Для доказательства от произвольного тела, ограниченного плоскими гранями, число телесных углов которого равно S, число граней равно H, число вершин равно A, отрезается один телесный угол A, образованный из ребер AB, AC, AD, AE, $AГ$. После отрезания остаются плоскости BCF, ECF, CDE, в результате в усеченном теле число телесных углов уменьшается на один и становится равным $S - 1$. В дальнейшем ход доказательства различен в зависимости от того, образован ли угол A из треугольников или же из фигур с большим числом сторон.

Если все грани — треугольники, при отрезании угла A число граней H уменьшится на два и будет равно $H - 2$, число ребер A уменьшится и будет равно $A - 3$.

Если одна грань — не треугольник ($ABbcCA$), после отрезания от нее треугольника (ABC) останется часть грани ($BbcC$), и, таким образом, число граней будет равно $H - 1$, число ребер будет равно $A - 2$, так как число ребер пополнится новым ребром (BC), которое ранее не считалось.

Если число нетреугольных граней, образующих угол A, равно λ, то после отрезания угла число граней будет равно $H-2+\lambda$, число ребер — $A-3+\lambda$.

Если подобным образом отсечь n телесных углов, то в усеченном теле будет $s-n$ телесных углов, $H-2n+\lambda+\lambda'+\lambda''+...$ граней, $A-3n+\lambda+\lambda'+\lambda''+...$ ребер.

Если тело сведется к тетраэдру, то

$$S-n=4,$$

$$H-2N+\lambda+\lambda'+\lambda''+...=4,$$

$$A-3n+\lambda+\lambda'+\lambda''+...=6,$$

тогда $A-H-n=2$, а так как $n=S-4$, то $S+H=A+2$.

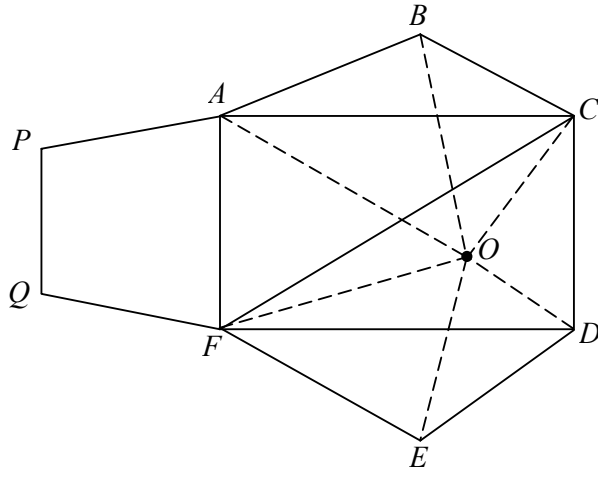
И хотя Эйлер пользуется термином *«Solidum»*, который до начала XIX века всегда обозначал геометрическое тело, ограниченное замкнутой выпуклой поверхностью, свое доказательство он проводит для многогранника — «поверхности», телесные углы которого образованы ребрами, и различает два случая, в зависимости от того, образован ли угол A гранями-треугольниками или же фигурами с большим числом сторон. При этом на теле появляются ребра (CF и CE), соединяющие вершины, соседние с вершиной A, которых до отрезания угла A не было.

Однако очевидно, что с помощью такой процедуры (отсечения всех ребер, составляющих телесный угол многогранника, и нанесения на поверхности усеченного многогранника новых ребер, соединяющих его вершины, соседние с отсеченной, и не соединенные ребрами) можно из многогранника, не обладающего свойством

$$S+H-A=2,$$

получить тетраэдр или двугранник, этим свойством обладающие. Возможно, поэтому в «Novi Commentarii» Эйлер публикует иное доказательство теоремы, в котором предложение 1: «В произвольном заданном теле, ограниченном плоскими гранями, так отсечь заданный его телесный угол,

чтобы в получившемся после этого теле было на один телесный угол меньше» решается с помощью процедуры удаления тетраэдров, составляющих телесный угол.



Пусть O — вершина отсекаемого телесного угла; OA, OB, OC, OD, OE, OF — ребра тела, выходящие из этой вершины. Эйлер предлагает сделать плоский разрез ABC, затем плоский разрез AOC и удалить отсеченный при этом тетраэдр $OABC$. Затем в оставшемся теле сделать плоские разрезы ACF и COF и отсечь тетраэдр $OACF$. Плоские разрезы CFD и OFD отсекают тетраэдр $OCFD$, и плоский разрез FDE отсечет тетраэдр $OFDE$. Так будет отсечен весь телесный угол с вершиной O, при этом новых телесных углов в теле не образуется.

Во втором предложении доказательства Эйлер подсчитывает число телесных углов, граней и ребер нового тела, получившегося из исходного с помощью описанного отсечения одного из телесных углов. Эти числа соответственно равны:

$$S-1;$$
$$H-2-\mu+\nu;$$
$$A-3-\mu+\nu,$$

где μ — число пар образовавшихся новых треугольных граней, соседних и лежащих в одной плоскости (таких как

ABC, *ACF*, *CFD* и *DFE*); ν — число нетреугольных граней исходного тела, сходящихся в вершине *O*. Так же подсчитывается, что если сумма всех плоских углов исходного тела *Rd*, то сумма таких углов нового тела $(R-4)d$.

Предложение 3 представляет собой доказательство теоремы: «У любого тела, ограниченного плоскими гранями, сумма всех плоских углов всех его граней равна числу прямых углов, равному четырежды взятому числу его телесных углов, уменьшенному на 8, т.е. если число телесных углов рассматриваемого тела равно *S*, то сумма всех его плоских углов равна $4S-8$ прямых углов».

Доказательство теоремы «У любого тела, ограниченного плоскими гранями, число граней плюс число телесных углов на два больше, чем число ребер» рассматривается в предложении 4. Действительно, если отрезать один из *S* телесных углов так, чтобы число их было $S-1$, то избыток числа ребер на число граней будет равен $A-H-1$, а у *n* раз обрезанного тела он равен $A-H-n$. Если отсекать телесные углы, чтобы получился тетраэдр, для которого $A-H-n=2$ и $n=S-4$, то $S+H=A+2$.

Процедура отсечения телесного угла методом Эйлера не применима, если в теле по некоторому ребру смежны более чем две грани. Для него всегда можно указать такой телесный угол, начиная с которого отсечением телесных углов невозможно прийти ни к тетраэдру, ни к двуграннику.

Аналогичный результат получается, если тело не связно, если тело не гомеоморфно ориентированной поверхности или не гомеоморфно сфере. Кроме того, если нарушены требования: любые две грани, либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют только одну общую вершину, либо имеют только одну общую сторону, то описанное отсечение телесных углов также не всегда возможно.

Таким образом, теорема справедлива для любого тела, к произвольной вершине которого можно применить отсечение телесного угла, описанное в доказательстве.

Сформулированная теорема и ее доказательство послужили мощным толчком для исследования многогранников, их классификации и явились первыми опубликованными топологическими фактами.

Список литературы

1. Descartes R. Oeuvres edited by Charles Adam and Paul Tannery. Vol. 10 / R. Descartes. Paris, 1908. P. 257—278.

2. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen / E. Steinitz // Encykl. der mathematischen Wissenshaften / W. Fr. Meyer, H. Mohrmann (eds.). Leipzig, 1922. Bd. III, AB. 12.

3. Euler L. Elementa doctrinae solidorum / L. Euler // Novi Commentarii Acad. sci. Petrop. 4 (1752/53), 1758. P. 104—140.

4. Euler L. Demonstratio nonnularum insignium proprietatum quibus solida hedris planis indusa sunt praedita / L. Euler // Ibid. P. 140—160.

5. Белый Ю. А. К теореме Эйлера о многогранниках / Ю. А. Белый // Историко-математические исследования. Вып. 16. М., 1965, С. 181—186.

6. Делоне Б. Н. Эйлер как геометр / Б. Н. Делоне // Леонард Эйлер. М., 1958. С. 133—183.

В. А. Коротина

ОТРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ИДЕЙ ЭЙЛЕРА В КУРСЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ПЕДВУЗА

Деятельность Эйлера многогранна и разностороння. Он занимался почти всем, что интересовало в то время математиков.

С. И. Вавилов

I. В области математики XVIII век справедливо может быть назван веком Эйлера (1707—1783) — петербургского академика, крупнейшего ученого.

Научное творчество Эйлера поражает своим исключительным объемом. Полное собрание сочинений Эйлера составляет около 70 томов большого формата. Ещё более поражает разнообразие интересов Эйлера, широта диапазона его творчества. Гений Эйлера проявился и в различных частях самой математики, и в математическом естествознании, и в приложениях математики к технике. Исследуя конкретные проблемы математики и математического естествознания, Эйлер всегда искал общие эффективные алгоритмы, позволяющие довести решение каждой отдельной задачи рассматриваемого типа до числового результата. Особое место в творчестве Эйлера занимала теория чисел. Проблемы высшей арифметики интересовали его на протяжении всей жизни; он посвятил им около 150

работ. «Эйлером положено начало всех изысканий, составляющих общую часть теории чисел», — писал П. Л. Чебышев.

До Эйлера вопросами теории чисел занимался известный математик XVII в. П. Ферма, который нашел многие важные теоремы теории чисел. Однако доказательство многих своих результатов Ферма не оставил. Поэтому такие предложения стояли перед математиками в виде отдельных проблем, причем не были ясны ни связи между проблемами, ни методы, которыми можно было бы исследовать их. Проблемы эти оказались под силу только Эйлеру. Эйлер доказал почти все теоремы Ферма и обобщил многие из них. При этом он открыл новые фундаментальные законы теории чисел, построил важные разделы её и развил глубокие методы исследования теоретико-числовых проблем.

В работах Эйлера было положено начало новому направлению исследований, а именно аналитической теории чисел, в которой свойства и отношения целых чисел исследуются методами анализа бесконечно малых. Работы Эйлера в этом направлении явились отправным пунктом дальнейших исследований о распределении простых чисел в натуральном ряду. Теория чисел превратилась в ветвь математики, в которой применяются методы самых разнообразных разделов этой науки.

В то же время методы и идеи, возникавшие первоначально в связи с решением проблем теории чисел, приводили к созданию новых весьма общих теорий в других областях математики. В частности, развитие современной алгебры в значительной мере стимулировалось запросами теории чисел, равно как и развитие некоторых разделов математического анализа (например, теории целых функций). В настоящее время теория чисел представляет собой важную ветвь математической науки, методы которой применяются не только в теоретических, но и в прикладных вопросах (теории кодирования, передаче информации, приближенном вычислении многомерных интегралов и

т.д.). Следует отметить, что в последнее время бурно развиваются новые области математики, требующие глубокого анализа дискретного, т.е. прерывного. В связи с этим усиливается интерес к теории чисел.

Эйлер был крупным деятелем математического просвещения. Велики его заслуги в области распространения элементарных знаний. Им написаны учебники по элементарной алгебре и арифметике. Оба эти учебника отличаются тщательно продуманной системой изложения. С научной строгостью и с большим методическим мастерством излагаются наиболее важные разделы курса. Школьники и сейчас проходят теорию логарифмов и тригонометрию «по Эйлеру», а студенты изучают аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление по руководствам, восходящим к трактатам знаменитого ученого. Эйлер пытался систематизировать изложение теории чисел. В его рукописном наследии найден «Трактат», в котором последовательно излагается теория делимости, теории квадратичных и степенных вычетов.

Л. Эйлер является создателем первой научной математической школы в России, так как его гениальные научные и методические идеи были преемственно восприняты многочисленными учениками, причем многие из них являлись одаренными математиками, во многом способствовавшими развитию и распространению идей Эйлера. Исследования, начатые Эйлером, были продолжены П. Л. Чебышевым, А. И. Коркиным, Е. И. Золотаревым, А. А. Марковым, Г. Ф. Вороным, И. М. Виноградовым, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботаревым, А. О. Гельфондом и др.

II. Научные интересы Эйлера в области теории чисел весьма обширны. Укажем лишь некоторые из них.

• Эйлер доказал почти все результаты, полученные Ферма.

• Изучил свойства совершенных и дружественных чисел, числа Мерсенна.

• Доказал различными способами малую теорему Ферма, дал её обобщение и использовал в своей теории степенных

вычетов. Созданная Эйлером теория вычетов привела его к формулировке квадратичного закона взаимности.

• Им была рассмотрена, доказана, обобщена и использована для нахождения простых чисел теорема о представлении простого числа вида $4n+1$ в виде суммы двух квадратов. Вопросы исследования простоты чисел и разложения их на множители всегда находились в центре внимания Эйлера.

• Важнейшей заслугой Эйлера было применение им в теории чисел средств математического анализа и использование теории чисел в других областях математики.

• Указал на возможность использования анализа для доказательства утверждений аддитивной теории чисел.

• Ряд работ связан с применением непрерывных дробей к вопросам математического анализа.

Работы Эйлера по теории чисел были предметом исследований многих ученых. В. Я. Буняковский и П. Л. Чебышев впервые систематизировали арифметические работы Эйлера и дали им краткие аннотации.

Они разделили все арифметические сочинения Эйлера на три раздела:

1. Делимость чисел: а) о целых числах в связи с их разложением на множители; количество целых чисел, взаимно простых с некоторым целым числом и меньших, чем оно; о суммах делителей чисел; дружественные числа; б) делимость различных выражений; в) теория вычетов и квадратичные вычеты.

2. Разложение чисел на суммы чисел различного вида.

3. Диофантов анализ: а) определение двух или нескольких неизвестных, заданных одним уравнением; невозможные уравнения; б) определение нескольких неизвестных, заданных двумя, тремя или четырьмя уравнениями; в) определение нескольких неизвестных, заданных более чем четырьмя уравнениями; г) неопределённые задачи, которые приводят к числу уравнений, большему, чем число неизвестных.

III. В педагогических вузах программа курса теории чисел предусматривает не только изучение основных разделов теории чисел, но и воспитание алгебраической культуры, необходимой будущему учителю для глубокого понимания целей и задач как основного школьного курса математики, так и факультативных курсов, что согласуется с целью математического образования.

Целью математического образования для студента является развитие:

- математической культуры;
- навыков математического мышления;
- навыков использования математических методов;
- умение создавать адекватные математические модели реальных ситуаций.

Математическое образование будущего учителя математики основывается на фундаментальных понятиях математики. Фундаментальность подготовки в области математики предполагает достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировки математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Курс «Теория чисел» в педвузе охватывает целые числа и основы теории делимости, сравнения и их арифметические приложения, кольца и идеалы.

Программа курса «Теория чисел» в педвузе включает следующие разделы:

1. Теория делимости в кольцах целых чисел. Отношение делимости, его простейшие свойства. Число и сумма делителей. Теорема о делении с остатком и её приложения. Систематические числа; перевод из одной системы в другую. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена. Разложение целых чисел на простые множители и его единственность. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида и его приложения. Рас-

пределение простых чисел, неравенства Чебышева. Понятие об асимптотическом законе распределения простых чисел. Простые числа в арифметических прогрессиях. Цепные дроби. Представление чисел цепными дробями.

2. Теория сравнений с арифметическими приложениями. Сравнения в кольце целых чисел, их свойства. Полная система вычетов. Аддитивная группа классов вычетов. Кольцо классов вычетов. Приведённая система вычетов. Мультипликативная группа классов вычетов, взаимно простых с модулем. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения первой степени с одной переменной. Сравнения высших степеней. Показатель (порядок) числа и класса вычетов по модулю. Первообразные корни. Существования первообразных корней по простому модулю. Индексы по простому модулю. Двучленные сравнения по простому модулю; таблицы индексов и их приложения. Понятие о степенных вычетах. Квадратичные вычеты и невычеты. Арифметические приложения теории сравнений. Длина периода систематической дроби.

3. Кольца. Идеалы кольца. Сравнение и классы вычетов по идеалу. Фактор-кольцо. Характеристика кольца. Поле частных области целостности. Простейшие свойства делимости в коммутативном кольце. Простые и составные элементы области целостности. Кольца главных идеалов. Евклидовы кольца.

В настоящее время теория чисел в педвузе является самостоятельной математической дисциплиной и включена в учебный план по специальностям «Математика», «Информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Остановимся на некоторых основных моментах при изучении курса теории чисел в педвузе, обратив особое внимание на разделы и вопросы, в которых ясно видно отражение основных теоретико-числовых результатов Эйлера в этом курсе. К таким разделам прежде всего относятся:

• Функция Эйлера, свойства функции Эйлера, формулы для вычисления функции Эйлера $\varphi(m)$.

• Сумма значений функции Эйлера, распространения на все делители данного числа.

• Теоремы Эйлера и Ферма. Применение теорем Эйлера и Ферма.

• Решение сравнений первой степени при помощи теоремы Эйлера.

• Правильные конечные цепные дроби, разложение в правильную цепную дробь. Подходящие дроби, их свойства.

• Решение сравнений первой степени с помощью цепных дробей.

• Применение сравнений первой степени к решению неопределённых уравнений первой степени с двумя неизвестными.

• Критерий Эйлера.

Изучение в курсе теории чисел избранных вопросов из наследия Эйлера еще не дает возможность в полной мере увидеть величие идей Эйлера и их роль в развитии теории чисел как математической науки и как учебного предмета.

Этот пробел частично может быть устранен, если в дополнение к учебному курсу по теории чисел в рамках спецкурсов и спецсеминаров, на научных семинарах изучать избранные вопросы учения Эйлера по теории чисел. При этом особое внимание обучающихся необходимо и целесообразно обращать на ключевые исторические факты теоретико-числового учения Эйлера.

В курсе «Теория чисел» теоретико-числовые вопросы сосредоточены в темах «Теория делимости в кольце целых чисел» и «Теория сравнений с арифметическими приложениями». В этих темах изучаются конкретные объекты — числа и их свойства.

В качестве применения теоремы о делении с остатком следует рассмотреть представление обыкновенной дроби в любой данной системе счисления, а в качестве применения алгоритма Евклида — представление НОД (a, b) в виде линейной комбинации чисел a и b с целыми коэффициентами, решения неопределенных уравнений, представление рациональных чисел в виде цепной дроби.

При изучении цепных дробей следует познакомить студентов с алгоритмом Эйлера разложения любого действительного числа в цепную дробь.

Бесконечность множества простых чисел в последовательностях чисел вида $4n-1$ и $6n-1$ следует рассмотреть после доказательства теоремы о бесконечности множества простых чисел и изучения простейших свойств символа Лежандра.

Напомнить, что для получения простых чисел Эйлер приводит следующие формулы:

1) $p = 2x^2 + 29$. При натуральных значениях x эта формула даёт 29 простых чисел;

2) $p = x^2 + x + 41$. Даёт 41 простое число;

3) $p = x^2 - 79 + 1001$. Даёт 80 простых чисел.

Неравенства Чебышева могут быть даны без доказательства, вопрос об асимптотическом законе распределения — в историческом плане.

Важный вопрос о числе вычетов в приведённой системе по модулю m решается при помощи функции Эйлера $\varphi(m)$. Функция Эйлера определяется для всех целых положительных m как число целых положительных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m, или как число чисел ряда $0,1,2,...,m-1$, взаимно простых с m.

Известно, что числа одного и того же класса вычетов по модулю m имеют с модулем один и тот же наибольший общий делитель. Особенно важны классы, для которых этот делитель равен единице, т.е. классы, содержащие числа, взаимно простые с модулем.

Взяв из каждого такого класса по одному вычету, получим приведённую систему вычетов по модулю m. Обыкновенно приведённую систему вычетов выделяют из системы наименьших неотрицательных вычетов: $0,1,2,...,m-1$.

Из определения ясно, что в приведенной системе вычетов по модулю m имеется как раз $\varphi(m)$ чисел. Очевид-

но, что значение $\varphi(m)$ характеризует также число классов вычетов по модулю m, взаимно простых с этим модулем.

При изучении теорем Эйлера и Ферма считаем важным показать, что теорема Ферма есть следствие из теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Если $m > 1$ и $(a,m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\, m)$.

Следствием теоремы Эйлера при $m = p$, где p — простое число, является теорема Ферма (малая теорема Ферма).

Теорема Ферма. Если p — простое число и a не делится на p, т.е. $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$.

При этом теореме Ферма можно придать более удобную форму: $a^p \equiv a(mod\, p)$. Это сравнение справедливо уже при всех a.

Приведение сравнения по составному модулю к сравнениям по степени простого и сравнений по степени простого к сравнению по составному модулю можно рассматривать на примерах. Здесь же определяется символ Лежандра и доказываются его простейшие свойства. Закон взаимности квадратичных вычетов, о котором говорил Эйлер, даётся без доказательства.

В качестве арифметических приложений теории сравнений следует рассмотреть применения сравнений к выводу признаков делимости, к проверке арифметических действий, к нахождению остатков от деления с помощью теорем Эйлера — Ферма, к нахождению длины периода периодической систематической дроби при помощи свойств показателя.

Изложение материала должно соответствовать научным выводам и проводится по возможности в доступной форме, причем основное внимание уделяется применению вводимых понятий для решения задач.

Л. Эйлер известен во всех областях математических наук. «Теоремы Эйлера», «числа и точки Эйлера» и так

далее встречаются во всех математических дисциплинах. После смерти Эйлера (1783 г.) его сочинения продолжали публиковать в изданиях Петербургской Академии наук, среди них большое место занимали его работы по теории чисел, изучение которых представляет большой интерес у математиков и по настоящее время.

Список литературы

1. Алгебра и теория чисел / под ред. Н. Я. Виленкина. М. : Просвещение, 1984.
2. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский. Мн : Вышэйш. школа, 1974.
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. М. : Наука, 1981.
4. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X кл. / Г. И. Глейзер. М. : Просвещение, 1983.
5. Депман И. Я. История арифметики / И. Я. Депман. М. : Просвещение, 1959.
6. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. М. : Высшая школа, 1979.
7. Люди русской науки / под ред. И. В. Кузнецова. М., 1961.
8. Михелович Ш. Х. Теория чисел / Ш. Х. Михелович. М. : Высшая школа, 1967.
9. Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России / Е. П. Ожигова. Л. : Наука, 1972.

Г. П. Матвиевская

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЭЙЛЕРА И ОРЕНБУРГСКИЙ КРАЙ

Среди научных предприятий Петербургской Академии наук, в которых активное участие принимал Леонард Эйлер, особо важное значение имела организация наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца в 1769 г. и обработка полученных результатов.

Это редкое периодическое небесное явление, наблюдавшееся в моменты, когда Венера на своей орбите оказывается между Солнцем и Землей, происходит через интервалы в 8, 105, 8, 112 лет. В XVIII веке оно имело место дважды — 26 мая / 7 июня 1761 г. и 23 мая / 3 июня 1769 г. — и оба раза вызвало большой интерес в европейских научных кругах. Его наблюдение давало ученым возможность решить важные астрономические и физические задачи, из которых главная состояла в уточнении величины солнечного параллакса. В 1761 г. наиболее значительным результатом наблюдений явилось открытие М. В. Ломоносовым атмосферы на Венере. Что касается солнечного параллакса, то в этом вопросе астрономы разошлись во мнениях, так как полученные значения сильно разнились между собой [1]. Решить спор должны были наблюдения 1769 г., которые поэтому вызывали всеобщий интерес и приняли характер беспрецедентного международного научного предприятия.

Готовясь наблюдать прохождение Венеры по диску Солнца 23 мая / 3 июня 1769 г., астрономы Европы начали заранее разрабатывать программу совместных действий, чтобы обеспечить их наибольший научный эффект. Самую активную роль при этом играла Петербургская Академия наук [2]. От её организаторской работы во многом зависел успех всей широкомасштабной международной акции, так как огромная территория России предоставляла возможность выбора удобных для наблюдения мест. Петербургская Академия наук оказалась на высоте как по организации наблюдений, так и по точности полученных результатов, подтвердив тем самым свой авторитет среди научных учреждений Европы.

Это в значительной мере явилось заслугой Л. Эйлера [3, с. 278—279; 4, с. 240], который в 1766 г. возвратился из Берлина в Россию и оказал решающее влияние на ход подготовительных работ, проводившихся под руководством его ученика С. Я. Румовского (1734—1812). По словам академика В. Г. Фесенкова, «организация наблюдений над прохождением Венеры по солнечному диску 1769 г. формально принадлежит Румовскому, но вся сложная переписка, усовершенствование метода наблюдений и обработка их, привлечение некоторых иностранных наблюдателей, закупка инструментов — все это исходило от Эйлера» [5, с. 22].

Самое активное участие в наблюдении прохождения Венеры по диску Солнца 1769 г. приняли два сына Леонарда Эйлера — Иоганн-Альбрехт (1734—1800) и Христофор (1743—1808), а также молодые ученые В. Л. Крафт (1743—1814) и А. И. Лексель (1740—1784), приглашенные для этого в Россию и позднее ставшие его близкими сотрудниками.

3 марта 1767 г. директор Академии наук В. Г. Орлов получил приказ Екатерины II организовать наблюдения за прохождением Венеры по диску Солнца, избрав места наблюдения и подготовив наблюдателей из моряков. Приказ положил начало работам, вскоре получившим широкий размах.

Ход этих работ отражен в научной переписке Академии наук с европейскими учеными — Д. Бернулли (1700—1782), Ж.-Ж. Лаландом (1732—1807) и др., также занимавшимися организацией наблюдений в разных странах, а затем обработкой полученных результатов, обмен которыми был четко налажен [6, 7]. По многочисленным письмам, которыми обменялись с коллегами конференц-секретари Петербургской Академии наук Я. Штелин (1709—1785), а с 1769 г. Иоганн-Альбрехт Эйлер, можно проследить, как решались важнейшие вопросы: о выборе мест наблюдений, об организации экспедиционных отрядов и приглашении иностранных ученых для участия в их работе, о снаряжении экспедиций, о заказах на астрономические инструменты в известнейших европейских фирмах (Шорт и др.) и т.д.

Академическая переписка рассказывает также об огромном коллективном труде европейских астрономов по обработке результатов наблюдений, проводившихся в разных обсерваториях. Значительную его часть выполнили петербургские ученые под руководством Леонарда Эйлера. Применяя новые, предложенные им методы обработки цифрового материала, они произвели сложнейшие вычисления и обобщили полученные при наблюдениях прохождения Венеры по диску Солнца результаты. В частности, было получено весьма точное значение солнечного параллакса 8″,67 [5, с. 22].

Назначенный организатором астрономических и физических экспедиций академик С. Я. Румовский (1734—1812) впоследствии описал подготовку наблюдений в сочинении «Наблюдение явления Венеры в Солнце, в Российской империи с 1769 г. учиненные, с историческим предуведомлением» (1771) [7].

Сам Румовский возглавил отряд, проводивший наблюдения на северо-востоке России — в Коле, Поное, Умбе. В Якутске работал отряд, которым руководил капитан И. И. Ислентьев. В Гурьеве и Яицком городке производил наблюдения Г.-М. Ловиц (1722—1774). Наконец, два экспедиционных отряда, получивших название Оренбургских

астрономических экспедиций, были направлены в Оренбург и Орск. Первым руководил адъюнкт астрономии Вольфганг Людвиг Крафт, вторым — поручик артиллерии Христофор Эйлер.

Все экспедиции были снабжены подробными инструкциями — об устройстве временных обсерваторий, установке инструментов, порядке ведения дневника наблюдений. Отмечалось, что до начала наблюдений необходимо определить географические координаты места и выверить часы. Наблюдатель должен был указать моменты внешнего и внутреннего соприкосновения Венеры с солнечным диском и определить форму Венеры. Кроме того, ему предписывалось отметить солнечные пятна и провести метеорологические наблюдения.

Из академической переписки видно, что в качестве одного из мест, где будет наблюдаться прохождение Венеры по диску Солнца, Оренбург был определен еще в 1767 г. [6, с. 77]. В 1768 г. сюда поступили указы Екатерины II о помощи экспедициям по пути их следования и в местах проведения наблюдений [9]. В указах предписывалось, чтобы «экспедициям во время приезда и на местах, где академические наблюдения чиниться будут, в случае каковой-либо надобности деланы были всевозможные вспоможения»; в частности, следовало обеспечивать экспедиции транспортными средствами, а для безопасности — «губернаторам во время проезда той экспедиции через каждую губернию… в пути давать по пристойности воинскую команду».

Выполнять эти указы предстояло генерал-майору И. А. Рейнсдорпу, получившему назначение на пост оренбургского губернатора 29 сентября 1768 г. [10]. Благодарственные отзывы участников всех академических экспедиций, которые имели с ним дело, свидетельствуют, что он отнесся к правительственному постановлению со всей серьезностью и оказывал ученым всяческую поддержку. Так, 3 мая / 24 апреля датирован приказ Рейнсдорпа об оказании содействия Г. М. Ловицу, отправлявшемуся в

Гурьев и Яицкий городок для астрономических и географических наблюдений [6, с. 129].

Работа оренбургских астрономических экспедиций, судя по хвалебным откликам, не раз встречавшимся в переписке Петербургской Академии наук, проходила без осложнений и дала превосходные результаты. Они отражены в публикациях В. Л. Крафта и Х. Эйлера, появившихся в 1769 г. в академическом журнале «Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae» (т. XIV).

Однако никаких подробностей об обстоятельствах, в которых проходили их наблюдения, в литературе не приводится. Между тем деятельность обеих экспедиций хорошо отражена в материалах Санкт-Петербургского филиала Архива РАН — в делах по организационным, финансовым и хозяйственным вопросам этих экспедиций и переписке их руководителей. Большой интерес представляют письма Христофора Эйлера к брату Иоганну-Альбрехту. Ниже приводится обзор этих материалов.

Наблюдения Х. Эйлера в Орске. Христофор Эйлер, впоследствии генерал-лейтенант, в 1769 г. был поручиком артиллерии. Он прибыл в Россию из Берлина в начале 1767 г. [6, с. 70—71]. Указ Екатерины II о назначении его «главным обсерватором» экспедиции подписан 7 января 1769 г. [11], но из дела Академической канцелярии следует, что подготовка к поездке началась значительно раньше: список полученных им книг и инструментов — с обязательством вернуть их в хорошем состоянии — датируется 11 октября 1768 г. [12].

Инструкция, выданная Х. Эйлеру, предусматривает, что после наблюдения в Орске прохождения Венеры по диску Солнца он должен проследовать по реке Яик (Урал) до Гурьева, определяя географические координаты различных мест, а затем отправиться по маршруту Астрахань — Днепр — Киев — Смоленск — Псков [10].

Эйлера сопровождал штурман Василий Киприянов, деловым качествам которого он дал впоследствии высокую оценку. Кроме того, к обеим оренбургским экспедициям од-

новременно был приписан — указом от 8 января 1769 г. — шведский подданный «часовой мастер Иван Андреевич Арел», выразивший желание участвовать в поездке [14].

Из расходной книги Эйлера, где скрупулезно зафиксированы разными почерками, на немецком и русском языках все сделанные им выплаты, видно, что в феврале он уже находился дороге и в конце месяца прибыл в Оренбург [15]. В записях от 22 и 23 февраля отмечены денежные суммы, «употребленные» на прогон лошадей за сто верст пути до Оренбурга и на покупку новых саней «взамен изломанных в дороге», а 27 февраля записано: «В городе Оренбурге куплено веревок для связывания инструмента и на починку саней на 1 рубль 41 коп.». После недолгой остановки экспедиция выехала в Орск: 4 марта было выплачено 4 руб. 73,5 коп. «за прогон от города Оренбурга до крепости Красногорской», 5 марта — 3 руб. 50 коп. за прогон до Губерлинской крепости, а 6 марта — 3 руб. 50 коп. за прогон от Губерли до Орской крепости.

В Орск экспедиция прибыла 7 марта, и о дальнейших событиях можно судить по рапортам Эйлера, которые он регулярно отправлял в Академию наук. Они написаны им собственноручно на немецком языке.

В первом рапорте, датированном 27 марта [16], Эйлер сообщает, что 7-го прибыл в Орск, который, исключая Оренбург, показался ему «самым удобным укреплением на линии». Уже 10 марта начались работы по строительству обсерватории, для которой он выбрал место в углублении (die Buchtung) на горе. Из-за плохой погоды и «мрачного неба» никаких наблюдений, кроме метеорологических, вести еще не удавалось.

Инструменты, которые Эйлер распорядился разместить у себя на квартире, хотя и пострадали в дороге, но к работе оказались пригодными. Он подробно описывает состояние барометра, микрометра, квадранта, которые выверялись в первые две недели пребывания в Орске.

Строительство обсерватории было завершено 27 марта, т.е. в день составления рапорта. Эйлер сообщает, что

«сегодня приказал доставить инструменты наверх» и собирается завтра с утра начать астрономические наблюдения. Как видно из последующих сообщений, это сооружение обошлось Академии наук в 31 рубль 18 копеек [17]. К более позднему рапорту, от 30 июня, Эйлер прилагает изображение обсерватории, ее внешнего и внутреннего вида и обозначает её расположение на плане местности (рис. 1).

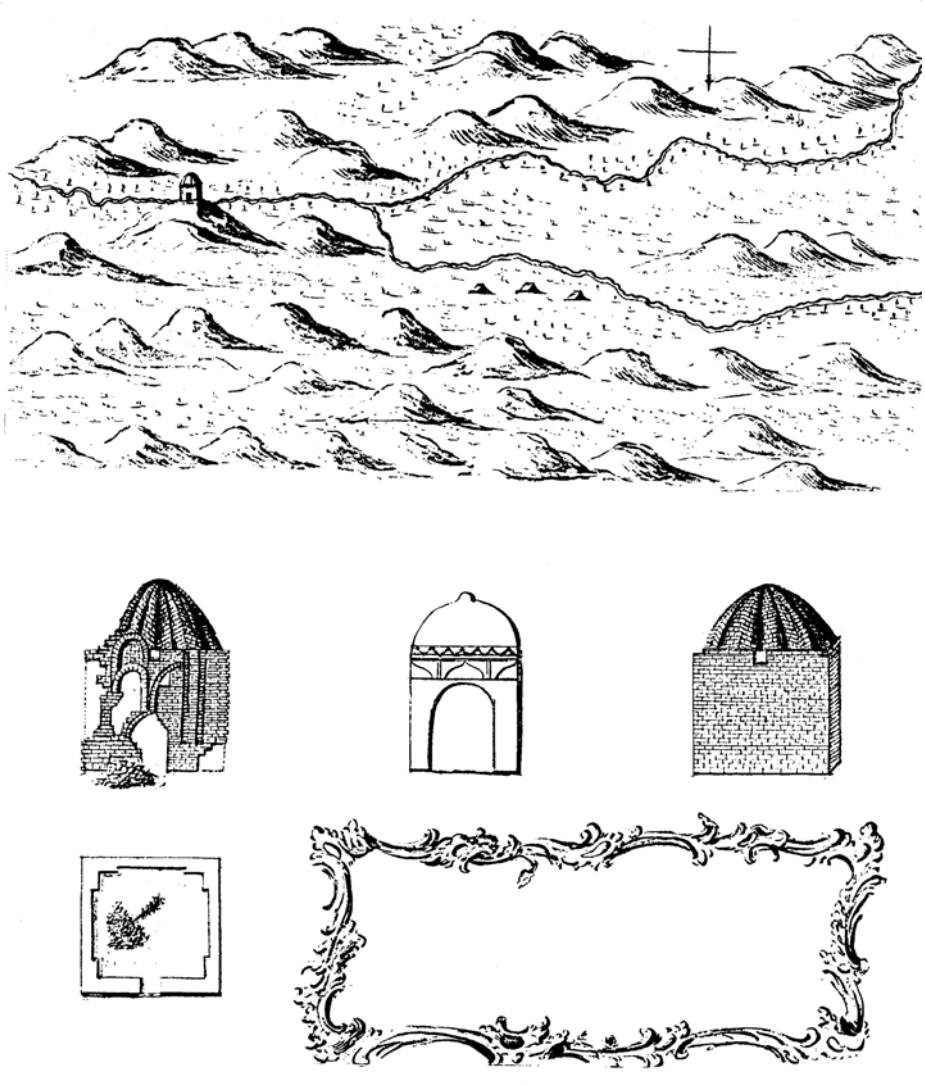


Рис. 1. Изображение астрономической обсерватории в Орске из рапорта Х. Эйлера в Академию наук от 30 июня 1769 года

Эту обсерваторию упоминает руководитель другой академической экспедиции П. С. Паллас (1741—1811), посетивший Орскую крепость в июле того же года, сразу после отъезда оттуда Х. Эйлера. Описывая Орск, он отмечает: «При самой Орской крепости, ниже песчаного острова, переезжают через реку Яик, которая здесь очень мелка и не шире 20 сажен. Орская крепость находится в киргизской степи, недалеко от Яика, около двух верст от устья Ори; но к сей речке гораздо ближе, нежели у оной, и построен на горе. На середине сей горы стоит изрядная каменная церковь, которую со всех сторон издалека видеть можно. Ныне стояла там хорошая обсерватория, на которой господин поручик Ейлер наблюдал прохождение Венеры через Солнце. Вокруг горы находятся жилые дома, из коих, кроме комендантского, нет ни одного хорошего. Крепость состоит из земляного дерном выкладенного вала. С речной стороны есть еще построенное совсем развалившееся укрепление, которое осталось от прежде построенного на сем месте города Оренбурга» [18].

Так выглядел Орск в 1769 г., когда экспедиция Х. Эйлера в течение трех месяцев проводила здесь астрономические наблюдения. Стоит сказать, что развалины обсерватории в Орске упоминаются оренбургскими краеведами даже в конце XIX века.

Заканчивая рапорт от 27 марта, Х. Эйлер доносит Академии наук о болезни двух из сопровождавших его солдат, которых ему пришлось оставить по дороге под опекой местного губернатора.

Второй рапорт [19] составлен 29 мая 1769 г., т.е. через несколько дней после наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца 23 мая и солнечного затмения, которое произошло 24 мая (рис. 2, вклейка). Вместе с ним в Академию наук отправлялся отчет о работе с момента прибытия в Орск, который был сразу же опубликован в Петербурге отдельным изданием [20]. Рапорт, в котором даются некоторые разъяснения к отчету, также был включен в публикацию в качестве введения.

der Academischen Versammlung vorgelesen den 7ten Juli 1769

empfangen den 6ten Juli 1769

Rapport

Orsk den 29ten May 1769.

Hier mit habe den Ehre meine Arbeit bis inclusive den 28 May mit Dienstes-Ehrfurcht zu überschicken, und wünsche nichts mehr als dieselben eine geneigte gelegenheit zu haben.
Für die bestimmung der Longitudo sehe mir gezwungen noch einige Zeit hier aufzuhalten, um gute observations von Emersions abzuwarten, weil die bisherigen zu nah bey Jupiters opposition gewesen, und also nicht sehr genug eine von ihrer accuratesse
Für die Latitudo des Orts hoffe schon eine geneigte gelegenheit zu haben, obschon mit der verification des Quadrants im Zenit nicht habe können fertig werden, weil der Quadrant etwas schadhaft geworden, welches aber leicht so bald wie nach Orenbourg können wieder gemacht werden; unterdessen habe mit aller Vorsicht auch Altitudines gegen Norden genommen, woraus man ersehen wird, daß der Error im Zenit dem im Horizont nicht gleich: so daß man ihn auch der Rechnung ganz weg lassen kann
Die Immersions und Emersions der Jupiters Trabanten wie auch Durchgang der Venus vorbey der Sonne sind alle mit der 12 Pfuigen achromatischen Lunette und dem Astronomischen Ocular observirt worden. Ich habe auch die Sonnen-Finsterniß mit selben observiren wollen, aber das wetter erlaubte mir da nicht eine so glückliche Observation zu machen als die der Venus.
Die Meteorologische Observations habe beym Journal besonders aufgezeichnet um damit nicht allzu unter eine andere Zeit Jahr gedrungen noch bis den 17ten Juny mich hier aufzuhalten, um die hier sichtbaren Emersions der Jupiters Trabanten und Occultationes fixarum von dem Mond wenn sich welche finden selten zu observiren.

ΙΤΡΑ РАН
3
26
4

Рис. 2. Рапорт Х. Эйлера в Академию наук 29 мая 1769 г.

Х. Эйлер сообщает, что вынужден остаться в Орске до 17 июня, чтобы провести повторные наблюдения спутников Юпитера, уточняющие значение географической долготы места, так как «она еще не определена с той точностью, которая требуется, чтобы можно было использовать результаты наблюдения Венеры». «В отношении широты моей обсерватории, — пишет он далее, — я достаточно уверен, хотя еще и не совсем закончил проверку (Verification) моего квадранта». Инструмент получил некоторые повреждения, впрочем, легко исправимые; это будет сделано сразу по прибытии в Оренбург.

Затмения спутников Юпитера, а также прохождение Венеры по диску Солнца наблюдались с помощью ахроматической подзорной трубы и астрономических окуляров. Эйлер замечает, что хотел применить их и для наблюдения солнечного затмения, но «погода не позволила провести столь удачное наблюдение, как у Венеры»: не удалось точно заметить начало и конец затмения.

Метеорологические наблюдения в отправляемом в Академию журнале выделены особо, «чтобы не было путаницы».

Еще более подробно Х. Эйлер описывает ход работы и ее результаты в письмах к брату И.-А. Эйлеру, которые датированы 21 и 29 мая 1769 г. (рис. 3, вклейка). Первое письмо [21] начинается поздравлением по случаю назначения брата конференц-секретарем Академии с жалованием в 300 руб. Об этом он узнал от В.-Л. Крафта, к которому в Оренбург столичные новости доходили быстрее. Сообщая, что собирается после 14 июня, закончив дела, уехать в Оренбург, он просит о распоряжениях относительно дальнейших географических исследований и о возможных изменениях в первоначальном плане работ.

Далее следуют подробнейшие разъяснения по поводу полученных результатов и их точности. Х. Эйлер подробно описывает действия по уточнению показаний поврежденного квадранта. Говоря об определении высоты полюса (51° 11' 58"), он указывает на необходимость его проверки

по таблицам, которых под рукой не оказалось. Особенно подробно описаны наблюдения затмений спутников Юпитера, нужные для определения географической долготы места.

Переходя к метеорологическим наблюдениям, Х. Эйлер отмечает особенности и местного климата, прежде всего сильные ветры. Так, 29 апреля было настолько ветрено, что «срывало крыши с домов». Он пишет, что зимой из-за ветра бывает невозможно выйти на улицу, а летом стоит страшная жара и что как раз в этот момент термометр на стене в комнате показывает 105° (по Фаренгейту). Земля от жары затвердевает на два аршина. Его попытка посадить около своей квартиры горох и салат, несмотря на хороший полив, успехом не увенчалась.

Во втором письме [22], отправленном 29 мая вместе с рапортом и журналом наблюдений, Х. Эйлер просит брата исправить ошибки, если они встретятся, и дополняет сообщенные раньше сведения о ходе работы. В частности, он пишет, что определения широты места, сделанные в мае, более надежны, чем начальные, благодаря приобретенному за это время опыту. Его не удовлетворяют наблюдения солнечного затмения: «Поскольку моменты начала и окончания аккуратно не определены, — признается он, — я не думаю, чтобы они были очень полезны». «Зато, — пишет Х. Эйлер далее, — я совершенно доволен тем, что имел такое счастливое утро для наблюдения прохождения Венеры через Солнце, и не думаю чтобы момент внутреннего контакта мог бы иметь ошибку около 1/4 секунды». В заключение он выражает надежду получить от Академии план дальнейших географических исследований и замечает, что обо всем сообщил отцу (lieben Papa) вместе с предыдущим рапортом.

Результаты наблюдений Х. Эйлера вошли в его большую статью, опубликованную в т. XIV академического журнала «Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae» и озаглавленную «Наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца 24 мая (4 июня) 1769 г., видимого

empfangen den 24ten Maj

Orsk den 10/21 Mai 1769

1 97

Liebster Bruder

Durch den Hl Graf hab ich vernommen daß der der Hl Graf zum Conferenz Secretair mit 300 Rbl rennt hat, gratulire von herzen und wünsche

Man wolle von der Academie für 14 tag einen förmlichen Rapport von meiner arbeit zu überschicken, weil aber meine gesicht auf mein order ich eine Plan nach welcher meinen geographischen Observations soll fortsetzen, welches aber bis date noch nicht geschehen, so wollte der gebeten haben daß wegen Erwiderung zu thun. So bald sie mit allem werde fertig sey werde grade nach Orenbourg zu rut, und möchte dann noch nicht mein order daß wegen dasey, so werde ich nicht still zu ligen nach den Plan so ich an auch den General Plan des Hl Graf gezeichnet den anfang machen, ich glaube auch nach denen eine veränderung selten geschehen sey daß wegen, daß ich in den anfang kein so grosse veränderung werde vorsehen.

Ich in Sibirien gemacht, machte den 27 Mai auf dem erbauten observatorio so gut als ich habe kriegen können den anfang mit den observations zur bestätigung der schon mir correspondirende Sonnen höhen wie auch culminirende Sir-Maria bediente, den Quadrant von zeit zu zeit am horizont verificirte, und für die verification im zenit den 7 Maria auf dem grossen Thor die höhe gegen Mittag als gegen Mitternacht beisey observirte: weil aber die bewegliche Lunette unmöglich auf den 90° habe bringen können schon den bleyfaden abgenommen. Die Ursache aber worauf der Quadrant hängt nur mit kleine Strichen sie im holtz gesetzt und nicht starck genug bestehen so daß bey mir jeder verrückung der beweglichen Lunette den bleyfaden muß suchen auch sey correspondirende zu bringen also daß diese observation nicht zur verification des Quadrants im zenit gebrauchen können muß also correspondirende höhen von Sir-Maria nehmen gegen

3
26
3

Рис. 3. Страница из письма Х. Эйлера к И.-А. Эйлеру от 21 мая 1769 г.

в Орской крепости. Наблюдения меридианных высот Солнца и неподвижных звезд для определения широты Орска. Наблюдение прохождения Венеры по Солнцу. Наблюдение затмения Солнца. Наблюдение положений солнечных пятен. Приложение: о метеорологических наблюдениях, проведенных в Орске, и об отклонении магнита, наблюдавшегося там же» [23].

Последний рапорт из Орска Х. Эйлер отправил 30 июня [24], хотя намеревался уехать оттуда раньше. Объясняя перемену своих планов, он пишет: «Я думал 15 июня закончить наблюдения в Орске, чтобы отправиться в путь в город Яик, но узнал, что примерно в 100 верстах отсюда у киргизов находится некая мечеть (Mainarens-Hans), о которой сообщил в своей «Оренбургской топографии» г-н статский советник Рычков. И я решил перед отъездом посмотреть и поискать, не найдутся ли там рукописи. Поэтому я написал г-ну губернатору в Оренбург, чтобы он дал мне конвой, откуда мне сверх того было добавлено 150 человек и пушка, с которым я 19-го отбыл, а 22-го оказался у этого храма, стоящего на горе». Далее Эйлер подробно описывает это сооружение, у которого казахи-кочевники, считая его святыней, устраивали свои погребения.

Имея, по-видимому, в виду его описание, П. С. Паллас отказался от поездки в эти места. Он писал: «Я почел за излишнее осмотреть находящиеся от Орска в полуденной гористой стране остатки малой четвероугольной Татарской мечети, потому что господин поручик Ейлер и господин адъюнкт Крафт оную уже видели» [18, с. 396].

Эйлер докладывает далее, что, вернувшись 25 июня в Орск, он произвел последние наблюдения 29-го и 30-го и «завтра или послезавтра» собирается уехать. «В Оренбурге, — пишет он, — я спишу мой географический план с плана господина адъюнкта Крафта, чтобы иметь возможность продолжить путешествие».

В расходной книге 3 июля значится выплата за прогон лошадей от Орска до Оренбурга, а выплаты за прогон от Оренбурга до Яицкого городка начинаются с 8 июля [25].

Следовательно, в Оренбурге Х. Эйлер оставался совсем недолго. Между тем именно сюда адресовал ему письма от 13 и 20 июля его брат, сообщавший о публикации его журнала наблюдений, проведенных в Орске [6, с. 141—142].

В Яицком городке Х. Эйлер, судя по записям в расходной книге, пробыл до 21 августа, а затем выехал в Гурьев. Очевидно, в это время он составил карту реки Яик, которая теперь хранится в Отделе рукописей Библиотеки РАН в Санкт-Петербурге под № 231. В орнаментированном картуше этой карты надпись: «Орская крепость, город Оренбург и Яицкий казачий городок и город Яицко-Гурьев утверждены обсервациями по прохождении Венеры сквозь Солнце в 1769 г.». О том, что карта получила одобрение, а Х. Эйлеру и лицу, чертившему ее, обещано покровительство директора Академии наук В. Г. Орлова, сообщал брату в декабре И.-А. Эйлер [6, с. 163].

В Гурьеве Х. Эйлер встретился с П. С. Палласом, о чем свидетельствует запись в расходной книге: «27 августа. Будучи в городе Гурьеве дана из моих господину профессору Палласу кибитка» и расписка Палласа [26].

Далее путь Х. Эйлера лежал в Астрахань, откуда он отправил рапорт в Академию наук, датированный 22 сентября 1762 г. [27]. Затем он прибыл в Царицын. Здесь с ним встретился И. А. Гильдинштедт, сообщивший 19 октября И.-А. Эйлеру об отъезде его брата в Черкасск [6, с. 158]. Сам он в письме от 14 октября просил Академию «прислать в скором времени к нему Бишингову новую географию и Миллерово собрание Российской истории» [28].

Книги, а также разные инструменты были отправлены ему в Черкасск, откуда он прислал рапорт, датированный 7 декабря 1769 г. [29]. В письме к нему И.-А. Эйлер указывает на желательность разграничения сферы деятельности между ним и Г. М. Ловицем, с тем, чтобы он проводил работы в Азове и Таганроге [6, с. 163—164].

Следующий рапорт Х. Эйлера прислан в апреле 1770 г. из Бамута [30]. В мае он пишет оттуда же о поездке в Кременчуг, о произведенных там астрономических наблюде-

ниях и о предполагаемом изучении Днепра [6, с. 181]. В июне он побывал в Запорожье [6, с. 184], а 17 августа датирован его рапорт в Академию наук из Переволоцка [31]. Любопытно, что в Запорожской Сечи Х. Эйлер был зачислен в запорожское войско и получил соответствующий аттестат за подписью последнего кошевого атамана Петра Калнышевского [32].

25 августа во время остановки отряда Х. Эйлера в Стародумовской станице произошел инцидент, о котором говорится в жалобе станичного старшины, направленной императрице [33]. Он сообщает, что «стоявшие в станице на квартире в доме казачьей жены Матрены Харитоновой» поручик Эйлер и «бывший при нем прапорщик» учинили драку: «прапорщик ударил станишного атамана Каргина палкою со всей своей силы», а Эйлер «порубил шпагой».

Последствия не замедлили сказаться. Уже 28 августа начальник Х. Эйлера граф Г. Г. Орлов приказал «исследовать» происшествие и «поступить по закону», для чего «упомянутого поручика» по возвращении прислать к нему [34]. Последовала официальная переписка, и в октябре Х. Эйлеру было отправлено письмо из Академии: «Директор, граф В. Г. Орлов, приказал возвратить вас из экспедиции, и для того по получении сего извольте со всею вашею экспедицией ехать в Санкт-Петербург и явиться в Академию наук» [35].

Между тем на Украине в это время бушевала холера. Экспедиции Х. Эйлера и В. Л. Крафта, прибывшего сюда же из Башкирии, оказались в эпицентре эпидемии. Крафт после смерти своего штурмана Никиты Щербатова и двух солдат обратился в Академию с просьбой «позвать его назад». 20 сентября датировано его письмо: «Сего месяца 5 числа отправился я с господином поручиком Ейлером из своего места в самой скорости и 9-го числа прибыли мы в Глухов, где поручик Ейлер остался, а я продолжил путь в Тулу» [36].

Таким образом, холера внесла коррективы в рабочие планы экспедиции. В ноябре Х. Эйлер приехал в Москву,

где общался с академиком Г. Ф. Миллером (1705—1783). Последний в это время хлопотал об устройстве в Москве постоянной обсерватории и писал в столицу о готовности Х. Эйлера работать для Академии наук [6, с. 194]. 29 ноября он сообщил И.-А. Эйлеру об отъезде его брата из Москвы [6, с. 197]. В Петербург Х. Эйлер прибыл 5 декабря 1770 г. [37].

В деле Академической комиссии имеется выданный Х. Эйлеру 17 января 1771 г. аттестат об успешной работе в экспедиции [38] и копия из журнала с распиской: «Как возвратившийся из астрономической экспедиции поручик артиллерии Христофор Эйлер сочиненные им наблюдения и вещи, принадлежащие до его экспедиции, сдал Академии исправно, то дать ему в том г. Эйлеру от комиссии расписку и отправить его обратно в команду и к главному начальнику, от которого он прислан был в Академию, его сиятельству графу Г. Г. Орлову с поданным об нем Эйлере от Академического собрания свидетельством в рассуждении оказанных им Академии услуг» [39].

Г. Г. Орлову 20 января Академическая комиссия отправила отношение, в котором сказано, что в Х. Эйлере «более теперь надобности Академии не обстоит», и далее: «А как он Эйлер препорученные ему от Академии дела как в астрономии, так и в географии исправил со всяким тщанием и прилежностью, и справедливо заслуживает от Академии похвалу, то такое свидетельство для ободрения его Эйлера Комиссия Академии наук за нужное сочла Вашему сиятельству чрез сие сообщить и сообщает» [40].

Кроме того, в деле имеется записка Эйлера о штурмане Василии Киприянове [41], в которой засвидетельствовано, что он «не токмо все ему порученные дела исправлял с превеликою охотою, отличным рачением и с желаемым успехом, но и во все оное время вел себя весьма хорошо». Поэтому Эйлер просит Академическую комиссию соответствующим образом рекомендовать штурмана «главной его команде». В результате Киприянову «за чрезвычайные его труды, которые он в бытность его в экспедиции при пору-

чике Эйлере положил в сделание некоторых для Академии географических карт», было выдано из академических сумм сорок рублей [42].

Рецензия А. И. Лекселя [43] на «астрономические наблюдения, проведенные Христофором Эйлером в 1769—1770 г. для определения географического положения различных мест Российской империи», была опубликована в 20-м томе академического журнала и подводила общий итог работ Х. Эйлера во время его экспедиций.

Христофор Эйлер и в дальнейшем продолжал заниматься астрономическими наблюдениями и сотрудничал с Академией. Так, в протоколах Конференции Академии наук 25 января 1790 г. отмечено сообщение княгини Е. Р. Дашковой о том, что она разрешила снабдить астрономическими инструментами генерал-майора Х. Л. Эйлера, который, отправляясь в военные лагеря в Финляндии, обещал прислать в Академию результаты своих астрономических наблюдений и географических определений; обещание свое он выполнил.

Наблюдения В. Л. Крафта в Оренбурге. Вольфганг Людвиг Крафт, впоследствии академик Логин Юрьевич Крафт, приехал в Россию в 1767 г., будучи приглашенным в Петербургскую Академию наук на должность профессора физики. Он родился в Петербурге в 1743 г. в семье академика Георга Вольфганга Крафта (1701—1754), который с 1725 г. работал в России, а в 1744 г. вернулся на родину в Тюбинген.

В. Л. Крафт окончил Тюбингенский университет в 1764 г. В Петербургскую Академию наук он был рекомендован И. Г. Ламбертом (1728—1777), который, отказавшись от предложенной ему должности, выдвинул его кандидатуру вместо своей [6, с. 72]. Молодой ученый уже был знаком с Леонардом Эйлером [6, с. 114], с которым в дальнейшем его связало тесное сотрудничество.

В письме от 30 июня 1767 г. из Лейпцига, адресованном И.-А. Эйлеру, Крафт сообщает, что отправил в Академию наук свои астрономические вычисления, а сам соби-

рается быть в Петербурге в августе [6, с. 84]. По прибытии он был включен в группу ученых, на которых возлагались обязанности наблюдателей предстоящего прохождения Венеры по диску Солнца, и определен с этой целью в Оренбургскую экспедицию.

В архивном деле, озаглавленном «По организационным, финансовым и хозяйственным вопросам экспедиции Крафта», имеется выписка из протокола Академического собрания от 22 декабря 1768 г., в котором сказано, что «по поданному от господина Ейлера старшего в академическую конференцию аттестату» В. Л. Крафт объявлен адъюнктом Академии [45]. Вскоре после этого, 8 января 1769 г. вышел указ о его направлении в Оренбургскую губернию для наблюдения прохождения Венеры по Солнцу [46].

Штурманом в его отряд был назначен Никита Щербаков, а часовой мастер Арел причислялся к обоим оренбургским отрядам. В деле Крафта имеется датированное 12 декабря 1769 г. «доношение в Академическую комиссию» от шведского подданного «часового мастера Ивана Андреевича Арела» о его желании участвовать в экспедиции [47].

В феврале В. Л. Крафт отправился в путь и 5 марта уже писал Я. Я. Штелину о благополучном прибытии в Оренбург и доставке туда инструментов [6, с. 118]. С ним было отправлено также некоторое количество изданных Академией календарей, которые он должен был продавать по дороге.

Первая из стоявших перед ним задач — строительство обсерватории в Оренбурге — решалась нелегко. В упомянутом письме к Штелину от 5 марта Крафт жаловался на трудности, связанные с плохой погодой. Однако, несмотря на это, работа шла интенсивно. В архивном деле среди расходов Крафта значится: «Для обсерватории за бревна, доски, железо, войлока, веревки — 13 р. 89 к.» [58]. В конце апреля, как можно судить по журналу астрономических и географических наблюдений В. Л. Крафта, начатому 27 апреля, он уже мог приступить к работе.

К сожалению, сведений о внешнем виде и месте расположения оренбургской обсерватории обнаружить не удалось. Но построена она, по-видимому, была хорошо. В письме от 3 сентября И.-А. Эйлер, сделав Крафту некоторые замечания по поводу устройства обсерватории, отмечает, что проведенные в ней наблюдения солнечного затмения были весьма удачны [6, с. 150—151].

Помимо наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца Крафт должен был дать точное определение географических координат Оренбурга, а также произвести метеорологические наблюдения. Результаты этой работы отражены в его журнале, начатом 27 апреля и законченном 27 мая. Пометка на нем свидетельствует, что Академическому собранию журнал был представлен 30 июня 1769 г. [49]. Сообщение Крафта было тогда же опубликовано в Петербурге отдельным изданием [50]. Кроме того, полученные им результаты полностью отражены в большой статье, которая была напечатана в академическом журнале «Novi Commentarii Academiae Petropolitanae», в томе, посвященном наблюдениям прохождения Венеры по диску Солнца на территории Российской империи [51].

Как видно из журнала Крафта, позднее (28 августа 1761 г.) в Академическое собрание были отдельно представлены материалы по определению долготы Оренбурга, явившиеся предметом специальной статьи [52].

В своих отчетах Крафт подробно описывает все операции, которые проводились во время наблюдений. Для широты Оренбурга, выверив предварительно показания квадранта, он получил сначала по наблюдениям высоты Солнца значение 51° 46′ 6″, а по высотам некоторых неподвижных звезд — 51° 46′ 3″. За широту места он принимает среднее значение 51° 46′ 5″.

«Для определения долготы, — пишет Крафт, — я постарался провести с большой точностью наблюдение солнечного затмения и — отваживаюсь заверить Императорскую Академию — уверен, что очень точно наблюдал его начало и конец. В наблюдении других фаз я был не столь

удачлив... но начало и конец — это самые важные моменты» [50, с. 2].

Далее Крафт описывает наблюдения спутников Юпитера, проводившиеся для уточнения долготы Оренбурга.

Уделив особенно много внимания магнитным явлениям в Оренбурге, Крафт отметил: «Отклонение магнитной стрелки я наблюдал повторно и нашел без значительных изменений 3 1/2 градуса к вечеру». Но этим наблюдением он был недоволен, считая, что прибор в дороге получил повреждение и его показания ненадежны. «Я пошлю это тем не менее лейтенанту Эйлеру, — продолжал он, — поскольку отклонение стрелки в Орске должно быть особенно значительным из-за близости магнитной горы. Эта гора принадлежит к превосходнейшим достопримечательностям здешней губернии: это — чистый магнит и в нем магнита несколько пудов».

В особый раздел отчета выделены результаты метеорологических наблюдений. Они проводились весьма тщательно, о чем свидетельствуют таблицы показаний термометра и барометра. В заключение Крафт отмечает некоторые особенности климата Оренбурга. «Дожди, — замечает он, — бывают здесь очень редко», и добавляет, что и в этом году после схода льда и обычного в этих местах половодья их нет совсем. Как и на Х. Эйлера, большое впечатление на Крафта произвели оренбургские ветры. Он пишет: «Самые сильные ветры — восточные и северо-восточные; и редко погода бывает тихой. Обыкновенно ветры исключительно сильны и вызывают зимой пронизывающий холод, а летом после жаркого дня — такую холодную ночь, что утром поле подчас покрыто инеем. Вихревые ветры возникают быстро и пробегают большое пространство» [50, с. 24].

В своем отчете Крафт сообщал: «9 июня я закончу здешние наблюдения и затем постараюсь как можно скорее направить мой путь к реке Белой в Уфе; исследование этой реки очень нужно здешнему начальству, так как по ней происходит транспортировка соли с здешних замеча-

тельных соляных приисков, но причал расположен на неудобном месте» [50, с. 3].

По некоторым записям из журнала можно заключить, что 13 июня он был в Гурьеве [53], где, по-видимому, встретился с П. С. Палласом. Это следует также из писем И.-А. Эйлера, который 3 сентября благодарит Крафта за присылку в Академию наук копии географической карты, «найденной им в Оренбургской канцелярии» [6, с. 150—151], а 24 сентября сообщает Палласу о получении «карты Оренбургской губернии, посланной через В. Л. Крафта» [6, с. 154]. Из кратких аннотаций этих писем неясно, о какой именно карте идет речь и кто ее обнаружил, но понятно, что для передачи копии Крафт и Паллас должны были в это время встретиться.

13 июля И.-А. Эйлер в письме, адресованном в Оренбург [6, с. 140—141], информировал Крафта о результатах наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца, проведенных другими учеными, предлагал продолжить географические наблюдения и передал разрешение участвовать в работах Г. М. Ловица в Дмитровске. Эти вопросы обсуждаются в письме Крафта из Уфы 29 августа. Он принимает поручение ехать в Дмитровск, но не торопится туда, «так как поездка Г. М. Ловица, вероятно, задержится» [6, с. 149]. Через месяц, 30 сентября, в письме, также написанном в Уфе, Крафт сообщает И.-А. Эйлеру, что посылает результаты проведенных там астрономических наблюдений и вскоре собирается выехать в Самару [6, с. 153].

Дальнейший путь В. Л. Крафта по Оренбургскому краю помогают проследить письма члена-корреспондента Петербургской Академии наук П. И. Рычкова (1712—1777) из его села Спасского в Москву к академику Г. Ф. Миллеру, через которого шла вся корреспонденция от академических экспедиций в Петербург.

В письме от 27 июля П. И. Рычков сообщает: «Адъюнкт Крафт… недавно писал ко мне, что поехал из Оренбурга для осмотру Магнитной горы» [54]. Следовательно,

желание лично побывать у столь поразившего его месторождения магнитной руды заставило В. Л. Крафта отсрочить отъезд в Уфу.

5 сентября П. И. Рычков пишет Г. Ф. Миллеру: «Г. артиллерии поручик Эйлер и г. Крафт мимо села моего еще не проехали. Слышал, что они должны быть в Уфе» [55]. Село Спасское лежало на пути между Оренбургом и Уфой, и участники всех академических экспедиций заезжали по пути к гостеприимному и ученому хозяину, незаменимому источнику полезных для них сведений об Оренбургском крае. Не зная точно маршрутов экспедиций Эйлера и Крафта, Рычков, видимо, считал, что они следуют вместе.

Наконец, 3 октября он сообщает о появлении долгожданного гостя: «Приехав из Оренбурга... узнал, что г. адъюнкт Крафт в Бугульме (15 верст отсюда) ожидал моего возврату оттуда. Того же дня он ко мне приехал и теперь мы вместе пишем письма» [56]. Далее Рычков докладывает Миллеру о собранных им для Академии наук образцах руды, камней и окаменелого дерева, которые Крафт обещает переправить, «положа все в особом ящичке» [57]. В письме от 16 октября Рычков повторяет, что «несколько рудных каменьев и окаменелых вещей, как я сам собрал», переданы Крафту — «он хотел переслать к вам из Самары по первому зимнему пути» [58].

С 26 октября в журнале В. Л. Крафта начинаются путевые заметки [59], в которых дается описание мест по дороге в Уфу — городов Сакмарска, Шарлутского (Tscharlutskoi), Бугульшанска, Стерлитамака. Он аккуратно заносил в журнал метеорологические и другие наблюдения, делал зарисовки мавзолеев, копировал арабские надписи с них.

Как видно из научной переписки, в ноябре 1769 г. В. Л. Крафт был в Самаре, где получил одобрение отправленных в Петербург докладов, карт и других материалов [6, с. 162], а затем переехал в Сызрань и провел там зиму, продолжая астрономические наблюдения для уточнения географических координат города [6, с. 175; 19].

Весной 1770 г. по предложению Академии наук, получив соответствующую инструкцию [60], В. Л. Крафт отправляется в Молдавию и Валахию, 30 июня он прибыл в Хотин, посетил действующую армию и сообщил в Академию о трудности дальнейшего продвижения [6, с. 185]. Он организовал географическое описание Бессарабии [6, с. 186], в Кременце, на территории Польши наблюдал комету [6, с. 189].

Эпидемия холеры заставила Крафта прекратить работу. В Хотине умер его штурман Никита Щербаков [61], а затем и другие члены его команды. Он вернулся в Киев. В письме в Академию наук от 3 августа 1770 г., в котором говорится о смерти последнего из находившихся при нем солдат, он просит «позвать его назад» [62], одновременно сообщая, что отправляет результаты астрономических наблюдений, проведенных им в Кременце [6, с. 189].

5 сентября вместе с прибывшими в Киев Х. Эйлером и И. А. Арелом Крафт срочно уехал в Глухов, где оставил спутников, а сам отправился в Тулу [63]. В письме, посланном оттуда 1 октября, Крафт сообщает о вынужденном отъезде из Киева, просит скорейшего отзыва в Петербург и сообщает, что к письму приложены результаты астрономических наблюдений, которые были проведены им в Сызрани и Оренбурге [6, с. 193]. 22 октября В. Л. Крафт приехал в Москву, а 1 ноября 1770 г. отбыл в Петербург [6, с. 194].

* * *

Результаты наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца, произведенных в разных странах, после их обработки и анализа позволили сделать важные для науки выводы. Их сформулировал в своей статье «Изъяснение прохождения Венеры по Солнцу, бывшему мая 23 дня 1769 г.» Х. Мейер, один из иностранных ученых, которые были приглашены в Петербург в это время [44, с. 108—109]. По его словам, польза от проведенных наблюдений

состоит прежде всего в том, что было получено уточненное значение горизонтального параллакса Солнца и определено расстояние между Солнцем и Землей, а также другими планетами и кометами. Кроме того, были получены результаты, имеющие большое значение для географии, физики, навигации и т.д.

Среди наблюдений, проведенных в разных местностях России, получивших высокую оценку у астрономов разных стран, наиболее успешными были признаны наблюдения в Оренбургском крае В. Л. Крафта, Х. Эйлера и Г. М. Ловица. Их результаты сразу начали обрабатываться.

Список источников и литературы

1. Адуло И. М. Международное научное сотрудничество в XVIII в.: наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца / И. М. Адуло // Материалы XXXII Всесоюз. науч. конф. аспирантов и молодых специалистов по истории естествознания и техники. М., 1990. Ч. 1. С. 79—82.

2. Кузнецова А. Б. Петербургская Академия наук XVIII века и прохождения Венеры по диску Солнца / А. Б. Кузнецова // Наука и техника: вопросы истории и теории. СПб., 1996. Вып. XII. С. 77—78.

3. Субботин М. Ф. Астрономические работы Леонарда Эйлера / М. Ф. Субботин // Леонард Эйлер : сб. статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. М. : Изд-во АН СССР, 1958. С. 268—375.

4. Абалакин В. К. Леонард Эйлер и развитие астрономии в России / В. К. Абалакин, Е. А. Гребенников // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука : сб. статей. М. : Наука, 1988. С. 237—253.

5. Фесенков В. Г. Очерк истории астрономии в России в XVII и XVIII столетиях / В. Г. Фесенков // Труды Ин-та истории естествознания. М., 1948. Т. II. С. 3—25.

6. Ученая корреспонденция Академии наук XVIII в. (1766—1782 гг.) / сост. И. И. Любименко. М. ; Л., 1937. [Далее — Ученая корресп., 1937].

7. Ученая корреспонденция Академии наук XVIII в. (1783—1800) / сост. Ю. Х. Копелевич, В. И. Осипов, И. А. Шафран. Л. : Наука, 1987. [Далее — Ученая корресп., 1983].

8. Павлова Г. Е. Степан Яковлевич Румовский / Г. Е. Павлова. М. : Наука, 1979.

9. ГАОО. Ф. 3. Оп. 1. Д. 87: Указ от 5 февраля 1768 г. Оренбургскому губернатору (л. 228); Указ от 28 августа 1768 г. Оренбургской Губернской канцелярии (л. 229).

10. Там же. Л. 187.

11. Санкт-Петерб. филиал Архива РАН (далее — ПФА РАН). Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 6—7.
12. Там же. Л. 3.
13. Там же. Л. 1.
14. Там же. Л. 11—12 об.
15. Там же. Л. 93—98.
16. Там же. Ф. 3. Оп. 26, № 4. Л. 2—2 об.
17. Там же. Л. 1 об.
18. Паллас П. С. Путешествие по разным провинциям Российского государства. Ч. II / П. С. Паллас. СПб., 1775. С. 388—389.
19. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 4. Л. 1—1 об.
20. Auszug aus den Beobachtungen welche zu Orsk bei Gelegenheit des Durchgangs der Venus vorbei der Sonnenscheibe angestellt worden sind. Durch Hrn. Christoph Euler, Premier-Leutenant bey dem Russisch-Kayserlichen Bombardier-Regiment. St.-Pet., 1769. 32 p.
21. ПФА РАН. Ф. 3. Оп 26. № 3. Л. 1—2 об.
22. Там же. Л. 3—4.
23. Observationes transitum Veneris per discum Solis dies 24 maii (4 junii) 1769, spectantes in castello Orsk institutae. Dei instrumentia. Observationes altitudinem meridianarum // Solis et stellarum fixarum, pro determinanda latitudine Orsk. — Observatio transitus Veneris per Solem. — Observatio eclipsis Solis. — Observatio circa positiones macularum Solarium. — Appendix de observationibus meteorologicis in Orsk institutis et de declinatione magnetica ibidem observata // Novi Commentarii Acad. Petrop. T. XIV. Pars 2. P. 219—267.
24. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 4. Л. 3—3 об.
25. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 100—100 об.
26. Там же. Л. 100 об.
27. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 4. Л. 6.
28. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 30—31об.
29. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 4. Л. 7.
30. Там же. Л. 9.
31. Там же. Л.10.
32. Депман И. Я. К биографии Эйлера / И. Я. Депман // Вопросы элементарной математики и методики её преподавания в школе. Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. Т. 260. Л., 1965. С. 121—123.
33. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 41—42.
34. Там же. Л. 45—45 об.
35. Там же. Л. 47.
36. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 1. Л. 51.
37. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 4. Л. 14.
38. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 73.
39. Там же. Л. 38.
40. Там же. Л. 66.
41. Там же. Л. 73.
42. Там же. Л. 68.

43. Lexell A. J. Observationes astronomicae pro determinando situ geographico variorum per Imperium Russicum locorum, a nob. Christophoro Eulero annis 1769—1770 factas / A. J. Lexell // Novi Commentarii Acad. sci. Petrop. T. XX. P. 541—576.

44. Гнучева В. Ф. Материалы для истории экспедиций Академии наук в XVIII—XIX вв. / В. Ф. Гнучева. М. ; Л., 1940. С. 124.

45. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 1. Л. 14.

46. Там же. Л. 18—18 об.

47. Там же. Л. 13.

48. Там же. Л. 77 об.

49. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 3. Л. 31—36.

50. Auszug ans den Beobachtungen, welche zu Orenburg bei Gelegenheit des Durchgangs ier Venus vorbey den Sonnenscheibeibe angestellt worden sind. 1769. 24 p.

51. Observationes astronomicae annis 1769 et 1770 instntutae. Una cum determmationibus geographicis aliquot locorum Imperii Russici inde deductis // Novi Commentarii Acad. sci. Petrop. T. XV. P. 571—587.

52. Determinatio longitudims geographici Observatorii orenburgensis. I. Eclipsis sattellitum Jovis; П. Eclipsis Solaris. — Calculus hujus observationis secundum methodum illustr. Euleri; Ш. Ipsa observatio. Errores tabularum celebr. Maieri // Novi Commentarri Acad. sci. Petrop. T. XIV. Pars 2. P. 555—569.

53. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 3. Л. 37—44 об.

54. ПФА РАН. Ф. 21. Оп. 3. № 236. Л. 364.

55. Там же. Л. 370.

56. Там же. Л. 371.

57. Там же.

58. Там же, л 372.

59. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 1. Л. 45—53.

60. Там же. Л. 1–2.

61. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26. № 1. Л. 74.

62. ПФА РАН. Ф. 3. Оп. 26а. № 1. Л. 48.

63. Там же. Л. 51.

Краткие сведения об авторах

Игнатушина И. В. — старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Коротина В. А. — кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Курбатова Л. Н. — старший преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного педагогического университета.

Личикова Ж. Ю. — старший преподаватель кафедры информатики Оренбургского государственного педагогического университета.

Матвиевская Г. П. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Научное издание

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера
(1707—1783)

Выпуск 5

Редакторы И. Н. Рожков, Е. С. Рожкова
Технический редактор И. Н. Рожков

Подписано в печать 14.06.2006 г.
Усл. печ. л. 6,23
Тираж 200 экз.

Издательство Оренбургского государственного педагогического
университета. 460844, г. Оренбург, ул. Советская, 19